

DEVOIR SURVEILLÉ

1 mars 2025

[durée : 2 heures]



Les documents et les objets électroniques sont interdits. Les exercices sont indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

On considère \mathbb{R} muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ . Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels. On pose

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, |x - a_n| \leq 2^{-n}\}.$$

- a) Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Indication : considérer les $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a_n| \leq 2^{-n}\}$.*
- b) Montrer que $1 \leq \lambda(A) \leq 2$.
- c) Calculer $\lambda(A^c)$ où A^c désigne le complémentaire de A dans \mathbb{R} .
- d) Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
- e) Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = n$ pour tout $n \geq 1$.
- f) Un borélien de \mathbb{R} ayant une mesure de Lebesgue finie, est-il nécessairement borné ?

Exercice 2

- a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer son espérance $\mathbb{E}(X)$ à l'aide d'un calcul explicite, vu en cours.
- b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.
 - (i) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)$.
 - (ii) En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$.

Exercice 3

Pour une certaine expérience aléatoire, l'ensemble des résultats possibles est

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

et l'ensemble des événements observables est $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

- a) À quelles conditions sur la famille de réels $(p_i)_{i \geq 2}$ définit-on une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) en posant $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$ pour chaque i de Ω ?
- b) Vérifier que ces conditions sont réalisées pour les

$$p_i = (i-1) \frac{2^{i-2}}{3^i}, \quad i \geq 2.$$

Indication : on pourra utiliser directement la formule du cours donnant l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, à condition de préciser clairement son application dans ce cas.

On tire un nombre N au hasard en utilisant cette expérience. On a alors

$$\mathbb{P}(N = i) = (i-1) \frac{2^{i-2}}{3^i}, \quad \forall i \geq 2.$$

Une fois N déterminé, on choisit au hasard (avec équiprobabilité) un entier X tel que $0 < X < N$.

- c) Déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X = k \mid N = i)$ pour chaque $k \geq 1$ et chaque $i \geq 2$.
- d) En déduire $\mathbb{P}(X = k)$. Quelle est la loi de X ?
- e) Calculer les $\mathbb{P}(N - X = j \mid N = i)$ et trouver, sans calcul, la loi de la variable aléatoire $N - X$.
- f) Les variables X et $N - X$ sont-elles indépendantes ?