

TD4 - VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Dans toute la fiche, on supposera que les variables aléatoires d'un même exercice sont définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour s'échauffer : événements, calculs de probabilités

Exercice 1 (*Les chats de Shrödinger*)

Considérons l'expérience de pensée suivante : on place 20 chats dans des boîtes individuelles. Par ailleurs, en plus des chats,

- ▷ 10 boîtes ne contiennent rien d'autre,
- ▷ 5 boîtes contiennent 3g d'arsenic,
- ▷ 5 boîtes contiennent 10g d'arsenic.

Au bout d'une heure, la probabilité qu'un chat soit encore en vie dans la boîte est égale à 1 si la boîte ne contient pas d'arsenic, 0,6 si la boîte contient 3g d'arsenic, et 0,2 si la boîte contient 10g d'arsenic¹. On choisit une des 20 boîtes au hasard.

- a) Quelle est la probabilité que le chat qui s'y trouve soit encore en vie au bout d'une heure ?
- b) Le chat est en vie. Quelle est la probabilité que la boîte ait été vide quand on l'y a placé ?

Exercice 2 (*Contrôleur contre fraudeur*)

Une compagnie de métro applique les tarifs suivants : un ticket coûte 1 €, une amende est de 20 € pour la première infraction, 40 € pour la deuxième, et 400 € pour la troisième. La probabilité p d'être contrôlé par trajet ($0 < p < 1$) est connue uniquement de la compagnie. Un fraudeur voyage sans payer jusqu'à sa deuxième amende, après quoi il cesse. On note T le nombre total de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende, et $q = 1 - p$ la probabilité d'un trajet sans contrôle.

- a) Montrer que la loi de T est donnée par

$$\mathbb{P}(T = k) = (k - 1)p^2q^{k-2}, \quad k \geq 2.$$

- b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(T > n)$.

Indication : On pourra commencer par chercher une formule explicite pour la somme de la série entière $f(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1}$, puis pour sa dérivée terme à terme.

- c) Calculer numériquement $\mathbb{P}(T > 60)$ (pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ?) lorsque $p = 1/10$ et lorsque $p = 1/20$.

1. Aucun chat n'a été maltraité pour l'élaboration de cette expérience de pensée !

Une variable aléatoire discrète

Exercice 3 (*Loi image*)

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{4})$ et f la fonction *parité*, c.-à-d. $f(n) = 1$ si n est impaire et $f(n) = 0$ si n est paire.

- a) Pourquoi $f(X)$ est une variable aléatoire (discrète) ?
- b) Déterminer la loi de $f(X)$.

Exercice 4 (*Deux dés*)

Nous lançons deux dés non truqués.

- a) La variable aléatoire X est la somme des points obtenus. Quelle est la distribution de X ?
- b) Même question pour la variable aléatoire Y égale au minimum des deux résultats obtenus.
- c) On considère la variable aléatoire $Z = (X - 7)^2$. Quelle est la distribution de Z ?

Exercice 5 (*Contrôle de qualité*)

Une machine-outil produit à la chaîne des objets manufacturés et l'on sait qu'en période de marche normale la probabilité pour qu'un objet soit défectueux est p . On se propose de vérifier la machine. À cet effet, on définit la variable aléatoire T_r égale au nombre minimum de prélèvements successifs qu'il faut effectuer pour amener r objets défectueux. Calculer la loi de T_r .

Exercice 6 (*Maximum de la loi de Poisson*)

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $P(X = k)$ est maximale ?

Exercice 7 (*Une autre formule pour l'espérance*)

Soit X une variable aléatoire d'espace d'états $\{0, \dots, N\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k).$$

Que peut-on dire si X prend ses valeurs dans \mathbb{N} tout entier ?

Plusieurs variables aléatoires discrètes

Exercice 8 (*Sur la loi uniforme*)

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

- a) Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$.
- b) Déterminer $\mathbb{P}(X \geq Y)$.
- c) Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 9 (*Loi jointe*)

On considère deux variables X et Y à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que l'on a, pour tout $(j, k) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathbb{P}(X = j, Y = k) = \alpha \frac{(j+k)(1/2)^{j+k}}{j!k!},$$

la *loi jointe* du couple de variables aléatoires (X, Y) , dont X et Y sont les *marginales*.

- Déterminer le réel α .
- À partir de cette formule, déterminer la loi de X et la loi de Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
- Montrer que $\mathbb{E}(2^{X+Y}) < \infty$, et la calculer.

Exercice 10 (*Mélange de lois, DS1 2024*)

Soient deux réels $\mu > 0$ et $p \in]0, 1[$. Dans une banque, le nombre de chèques émis par les clients en un jour est une variable aléatoire X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$. Pour chaque chèque émis, la probabilité que ce chèque soit sans provision est p .

On appelle Y le nombre de chèques émis sans provision lors d'une journée.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n)$ et $\mathbb{P}(X - Y = l \mid X = n)$ suivant les valeurs de $k \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$.
- Utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de Y et celle de $X - Y$.
- Calculer $\mathbb{P}(X - Y = l \mid Y = k)$ en fonction de k et l . Les variables $X - Y$ et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 11 (*Minimum de lois géométriques*)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On considère N variables indépendantes X_1, \dots, X_N , chacune de loi géométrique de paramètre p .

- Soit $i \in \{1, \dots, N\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X_i \leq n)$ puis $\mathbb{P}(X_i > n)$.
- On définit la v.a. Y par $Y = \min_{1 \leq i \leq N} X_i$, c.-à-d. que pour tout $\omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min\{X_i(\omega), \dots, X_N(\omega)\}$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leq n)$. Quelle est la loi de Y ?
 - Y admet-elle une espérance finie? Si oui, la calculer.

Exercice 12 (*Deux propriétés classiques des lois de Poisson*)

- Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 .
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)$.
 - En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$ et la variance $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$.
- On considère deux variables aléatoires X et Y . On suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre λ , et qu'il existe $p \in [0, 1]$ tel que pour tout $k \leq m$,

$$\mathbb{P}(X = k \mid Y = m) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

On dira alors que la distribution *conditionnelle* de X sachant $\{Y = m\}$ est Binomiale(m, p). Déterminer la loi de X .

Exercice 13 (*Retours à l'origine*)

Considérons un ivrogne qui, à chaque étape, fait un pas en avant avec une probabilité $p > \frac{1}{2}$ et un pas en arrière avec une probabilité $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi décrivant les déplacements de l'ivrogne, où

$$P(X_i = +1) = p, \quad P(X_i = -1) = q.$$

On pose la variable « position » $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ et l'événement « retour à l'origine » $A_n := \{S_n = 0\}$. Déterminer la probabilité que l'ivrogne retourne une infinité de fois à l'origine.

Rappelons la formule de Stierling $n! \sim_{\infty} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 14 (*Désaccord avec Borel ?*)

Considérons un jeu infini de pile ou face avec une pièce équilibrée et définissons la suite d'événements

$$F_n : \text{« le premier et le } n\text{-ème jet donnent face »}.$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = \limsup F_n$ l'événement « les événements F_n se produisent infiniment souvent ».

a) Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} P(F_n) = +\infty \quad \text{et} \quad P(F) = \frac{1}{2}.$$

b) Expliquer pourquoi ceci n'est en contradiction ni avec le lemme de Borel-Cantelli, ni avec la loi du « zéro-un » de Borel².

Exercice 15 (*Le paradoxe du singe savant*)

Un singe (immortel) tape indéfiniment et au hasard sur le clavier d'une machine à écrire. Montrer que presque sûrement le singe écrira un nombre infini de fois l'énoncé de ce même exercice.

Exercice 16

Une pièce de monnaie équilibrée est lancée une infinité de fois. Nous cherchons à déterminer la probabilité d'obtenir une infinité de fois un million de « pile »s consécutifs.

Les lancers sont modélisés par une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, où $X_n = 1$ correspond à « pile » et $X_n = 0$ à « face ». Les événements considérés sont alors de la forme

$$A_n = \{X_n = X_{n+1} = \dots = X_{n+999999} = 1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Les événements A_n sont-ils indépendants ?

b) Considérer la sous-suite $B_n = A_{10^6 n}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Conclure.

2. Appelé également « deuxième lemme de Borel-Cantelli ».