

TD - COMPLÉMENTS

Applications mesurables

Exercice 1 (*Partitions et fonctions mesurables*)

Soit $(A_n)_{n \in I}$ une partition d'un ensemble E où $I \subset \mathbb{N}$.

- a) Caractériser les éléments de la tribu $\mathcal{T} := \sigma(\{A_n \mid n \in I\})$ lorsque $I = \{0\}$, $I = \{0, 1\}$, $I = \{0, 1, 2\}$, $I = \mathbb{N}$.
- b) Soit f une fonction mesurable de (E, \mathcal{T}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que f est constante sur chaque A_n . En déduire la forme générale des applications mesurables pour I comme dans la question précédente.

Exercice 2 (*Mesurabilité de limites de fonctions mesurables*)

Soient (F, d) un espace métrique et (E, \mathcal{T}) un espace mesurable. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans F qui sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(F))$ -mesurables.

- a) Supposons dans cette question que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une application f . Montrer que f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(F))$ -mesurable.
- b) Supposons que (F, d) soit complet. Montrer que

$$\{x \in E \mid (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement}\} \in \mathcal{T}.$$

Exercice 3

Soit un espace mesurable (E, \mathcal{T}) et f une application mesurable de (E, \mathcal{T}) vers $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens. Pour $a > 0$, on définit f_a par :

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < a, \\ a & \text{si } f(x) \geq a, \\ -a & \text{si } f(x) \leq -a. \end{cases}$$

Montrer que f_a est mesurable.

Exercice 4 *mélange de deux exos de la fiche 4, pour un projet de DS1 2025*

On munit \mathbb{R} de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

- a) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles mesurables, qui converge simplement vers une fonction f sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(]-\infty, a]) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} f_k^{-1}\left(]-\infty, a + \frac{1}{p}]\right).$$

Indication : montrer que $f(x) \leq a \iff \forall p, \exists n, \forall k \geq n, f_k(x) \leq a + \frac{1}{p}$.

- b) En déduire que f est mesurable.
 c) Étant donnée une fonction dérivable g sur \mathbb{R} , montrer que sa dérivée g' est mesurable.

Indication : on remarquera que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(x + \frac{1}{n}) - g(x)}{\frac{1}{n}} = g'(x).$$

Mesures et mesure de Lebesgue

Exemples et propriétés des mesures

Exercice 5 *(Exemples de mesures)*

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'application donnée est une mesure sur l'espace mesurable (E, \mathcal{T}) .

- a) Soit $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$. Pour $a \in E$ fixé, δ_a est l'application définie par $\forall A \in \mathcal{T}, \delta_a(A) = \mathbf{1}_A(a)$.
 b) Soient $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$ et $\mu(A) = 0$ si A est dénombrable, $\mu(A) = 1$ sinon.

Exercice 6 *(Régularité et mesure finie)*

Soit μ une mesure **finie** sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. L'objectif de l'exercice est de montrer que μ une mesure **régulière**, c.-à-d. pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) \mid F \text{ fermé}, F \subset A\} \quad \text{et}$$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) \mid O \text{ ouvert}, A \subset O\}.$$

- a) Montrer μ est régulière si et seulement si tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vérifie la propriété (\star) suivante :

$(\star) : \forall \varepsilon > 0$ il existe un ouvert O et un fermé F de \mathbb{R} tels que $F \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus F) \leq \varepsilon$.

- b) Introduisons $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mid A \text{ vérifie } (\star)\}$.

(i) Montrer que \mathcal{T} contient tous les intervalles de la forme $]-\infty, a], a \in \mathbb{R}$.

(ii) Montrer que \mathcal{T} est stable par union dénombrable.

Indication : Soit $A_n \in \mathcal{T}$, $n \geq 1$, et $\varepsilon > 0$. Considérer alors F_n fermé de \mathbb{R} et O_n ouvert de \mathbb{R} tels que $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $\mu(O_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Remarquer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\mu(\bigcup_{k \geq 1} F_n) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^n F_k) + \frac{\varepsilon}{2}$.

- (iii) Montrer que \mathcal{T} est stable par passage au complémentaire.
- (iv) Conclure.

Autour de la mesure de Lebesgue

Exercice 7 (*Un ensemble non borélien : l'ensemble de Vitali*)

Nous allons exhiber dans cet exercice une partie de \mathbb{R} qui n'est pas dans la tribu des boréliens.

- a) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on définit la relation suivante : $x \mathcal{R} y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.
- b) En déduire qu'il existe $E \subset [0, 1]$ tel que pour tout réel x , on peut trouver un réel unique $y \in E$ avec $x - y \in \mathbb{Q}$.
- c) On pose

$$G = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (E + r)$$

Montrer que $[0, 1] \subset G \subset [-1, 2]$ et montrer que si $r, s \in \mathbb{Q}$, alors $r \neq s \iff (E + r) \cap (E + s) = \emptyset$.

- d) En utilisant la mesure de Lebesgue, en déduire que $E \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (on raisonnera par l'absurde).

Variables aléatoires discrètes

Pour s'échauffer : événements, calculs de probabilités

Exercice 8 (*Calculs de probabilités*)

Dans un restaurant, on compte 18 femmes et 12 hommes. Il y a 21 droitiers en tout, dont 15 sont des femmes. En choisissant un client au hasard, quelle est la probabilité qu'il/elle soit gaucher-ère ? Même question si l'on choisit un homme au hasard.

Exercice 9 (*Un problème de transit*)

Deux avions (A et B), contenant respectivement $n_A = 20$ et $n_B = 40$ passagers, atterrissent à l'aéroport Charles de Gaulle. Dans l'avion A, qui vient de Séoul (Corée du Sud), chaque passager a une probabilité $p_A = 0,01$ d'être infecté par le coronavirus. Dans le avion B, qui vient de Houston (USA), chaque passager y a une probabilité $p_B = 0,2$ d'être infecté. On suppose que les passagers sont tous indépendants entre eux.

- a) On note X_A et X_B le nombre de passager infectés dans chacun des avions.
 - (i) Quelle est la loi de X_A et X_B ?
 - (ii) Quelle est l'espérance du nombre total de passagers infectés ?
 - (iii) S'il y a deux ou plus passagers infectés, peu importe leur provenance, l'aéroport doit être scellé, et tous les passagers mis en quarantaine. Quelle est la probabilité que cela ne soit pas nécessaire ?

- b) Un bus attend les passagers de Houston (avion B), mais un passager n'est pas autorisé à monter si une caméra thermique lui repère de la fièvre, donc le bus ne contiendra que les $Y_B \leq 40$ passagers pour lesquels aucune fièvre n'a été repérée. La caméra repère de la fièvre pour un passager infecté dans 95% des cas, et repère de la fièvre pour un passager sain dans 20% des cas.
- (i) On suppose que $X_B = 10$. Quelle est la distribution du nombre de passagers sains qui a pu monter dans le bus ? Quelle est la distribution du nombre de passagers infectés qui a pu monter dans le bus ?
 - (ii) On suppose toujours que $X_B = 10$. On choisit une personne au hasard dans le groupe de Houston, quelle est la probabilité p_E qu'elle soit autorisée à monter dans le bus ? Même question si $X_B = k \in \{0, \dots, 40\}$. Quelle est la distribution de Y_B ?
 - (iii) On ne suppose plus rien sur X_B . On choisit au hasard un des passagers en provenance de Houston, calculer p_E .
- c) On suppose que la caméra thermique a scanné également les passagers de Seoul. Quelle est la probabilité qu'elle n'ait repéré de la fièvre chez aucun des passagers des deux vols ?

Une variable aléatoire discrète

Exercice 10

Soit Y une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} . On dit que Y est sans mémoire si, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $P(Y > n) > 0$ et

$$P(Y > n + m \mid Y > n) = P(Y > m).$$

- a) On suppose que Y suit une loi géométrique. Démontrer que Y est sans mémoire. Interpréter ce résultat en considérant une suite d'épreuves répétées.
- b) Réciproquement, on suppose que Y est sans mémoire. Démontrer que $P(Y > 0) = 1$ et qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P(Y > n) = (1 - p)^n.$$

- c) En déduire que Y suit une loi géométrique.

Plusieurs variables aléatoires discrètes

Exercice 11 (*Mélange de lois*)

On suppose que le nombre N d'œufs pondus par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre α :

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \quad k \in \mathbb{N}$$

On suppose également que la probabilité de développement d'un œuf est p et que les œufs sont mutuellement indépendants. On note S le nombre (aléatoire) de survivants. Montrer que S suit une loi de Poisson de paramètre $p\alpha$.

Exercice 12 (*Fonctions génératrices*)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} . On appelle *fonction génératrice* de X la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n.$$

- a) Soit R le rayon de convergence de cette série, montrer que $R \geq 1$.
- b) À l'aide du théorème de transfert, exprimer $G_X(t)$ comme l'espérance d'une fonction de X pour $t < R$.
- c) (i) Justifier que G_X est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

(ii) En calculant ses premières dérivées, justifier que sa dérivée k -ième $G_X^{(k)}$ est donnée par

$$G_X^{(k)} = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \frac{n!}{(n-k)!} t^{n-k}.$$

(iii) Exprimer $G_X^{(k)}$ en fonction de la distribution de X .

(iv) En déduire que si $G_X = G_Y$ sur $] -1, 1[$ alors X et Y ont même loi.

- d) (i) Calculer G_X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p puis lorsque X suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

(ii) On suppose que X et Y sont indépendantes. Démontrer que pour tout $t \in] -1, 1[$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

(iii) Soit $X \sim \text{Bin}(n, p)$ et $Y \sim \text{Bin}(m, p)$ deux variables aléatoires indépendantes. En utilisant les fonctions génératrices, déterminer la loi de $X+Y$. Retrouver ce résultat sans les fonctions génératrices.

- e) On suppose maintenant que $R > 1$.

(i) On suppose que X est intégrable, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X = n) < +\infty$. Calculer la dérivée G'_X de G_X et exprimer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de G'_X .

(ii) On suppose maintenant que X est de carré intégrable, i.e. $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X = n) < +\infty$. Calculer G''_X et montrer que

$$\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1).$$

(iii) En déduire en fonction de G_X l'expression de la variance de X .

Borel-Cantelli

Exercice 13 (Convergence presque sûre)

Soit $\alpha > 0$. Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli $(X_n)_{n \geq 1}$ de paramètres $p_n = n^{-\alpha}$, c.-à-d. $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ pour tout $n \geq 1$.

- a) Soit L l'événement « La suite $(X_n)_{n \geq 1}$ admet une limite ». Calculer $\mathbb{P}(L)$ en fonction de α .
- b) On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire X si

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1.$$

Discuter la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$ en fonction de α .

Variables à densité

Loi exponentielle

Exercice 14 (Loi de Pareto)

- a) Soit $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On note F_Y sa fonction de répartition. Exprimer à partir de F_Y la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire $Z = e^Y$.
- b) Soit a un réel strictement positif fixé. On définit la fonction f par

$$f(t) = \frac{a}{t^{a+1}} \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(t).$$

Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. En déduire que f est une densité de probabilité. La loi de densité f s'appelle *loi de Pareto* de paramètre a .

- c) Une variable aléatoire X a pour densité f . Calculer la fonction de répartition F_X de X .
- d) Soit $Y \sim \mathcal{E}(a)$ est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a , donc de densité $g(t) = a e^{-at} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t)$. Quelle est la loi de $Z = e^Y$?

Exercice 15 (Une loi à reconnaître)

Soit ρ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\rho(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

- a) Démontrer que ρ est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X .
- b) On considère la variable aléatoire $Y = \ln(1 + |X|)$. Calculer sa fonction de répartition.
- c) Reconnaître la loi de Y .

Intégrale de Lebesgue

Bases sur l'intégrale de Lebesgue

Exercice 16 (Quiz)

- a) La somme de deux fonctions intégrables est-elle intégrable ?
- b) Le carré d'une fonction intégrable est-il intégrable ? Une fonction de carré intégrable est-elle elle-même intégrable ?
- c) La composée de deux fonctions intégrables est-elle intégrable ?

Exercice 17 (Calcul d'une intégrale)

On considère la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[0, 1]$ et calculer son intégrale.

Autour du théorème de convergence monotone

Exercice 18 (Mesure de comptage)

On rappelle que la mesure de comptage μ est définie sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ par $\mu(A) = \text{card}(A)$ si A est fini et $\mu(A) = +\infty$ sinon.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\int_{\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{n\}} d\mu$, $\int_{\mathbb{N}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \mathbb{1}_{\{k\}} d\mu$
- b) Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(n) = \frac{1}{2^n}$. Calculer $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$.
- c) Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$. Justifier que $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$.
- d) Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est μ -intégrable si et seulement si $\sum f(n)$ est absolument convergente et que, dans ce cas, $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$.
- e) Donner l'exemple d'une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{N}} f d\mu$ n'est pas bien défini, mais telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \in \mathbb{R}$ est bien définie.

Exercice 19 (Majoration d'intégrales qui passe à la limite)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives convergeant simplement vers f . On suppose qu'il existe une constante K telle que $\int f_n d\mu \leq K$ pour tout n . Montrer que $\int f d\mu \leq K$.

Indication : Considérer la suite $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$.

Lemme de Fatou

Exercice 20 (Inégalité de Fatou stricte I)

On note λ la mesure de Lebesgue. Soit $f_n = n \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}$.

- a) Appliquer si possible le lemme de Fatou.
- b) Calculer $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda$

Exercice 21 (*Inégalité de Fatou stricte II*)

Soit λ la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[-1, 1]$, et $g = \mathbb{1}_{[0,1]}$. On définit $f_n(x)$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } n \text{ est pair,} \\ g(-x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$\int_{[-1,1]} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\lambda < \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[-1,1]} f_n d\lambda.$$

Exercice 22 (*Contradiction avec Fatou ?*)

On note λ la mesure de Lebesgue. Soit $f_n = -\frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f = 0$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f mais que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda < \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

Est-ce que cela contredit le lemme de Fatou ?

Exercice 23 (*Lemme de Fatou et quasi-domination*)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant simplement μ -presque partout vers f . Soient h et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des fonctions positives et μ -intégrables. On suppose que $|f_n| \leq g_n + h$, et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu = 0$

- En utilisant le Lemme de Fatou, montrer que f est μ -intégrable.
- Montrer que $\liminf g_n = 0$ μ -presque partout en utilisant le Lemme de Fatou.
- En appliquant le Lemme de Fatou aux fonctions $g_n + h \pm f$, montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu,$$

en déduire $\lim \int_E f_n d\mu$.

Inégalités probabilistes, LGN et TCL

Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 24 (*Loi faible des grands nombres*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même espérance m et de même variance σ^2 . On pose

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Démontrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0.$$

Exercice 25 (*Une variante de la loi faible des grands nombres*)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes. On suppose que chaque X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n . On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et on souhaite démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left(\left| \frac{S_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Pourquoi ne peut-on pas appliquer directement la loi faible des grands nombres ? Quelle est l'espérance de S_n ? Sa variance ? Démontrer que $V(S_n) \leq n$. En déduire le résultat.

Exercice 26 (*Un problème chinois !*)

On suppose qu'à la naissance, la probabilité qu'un nouveau-né soit un garçon est égale à $1/2$. On suppose que tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir un garçon. On souhaite évaluer la proportion de garçons dans une génération de cette population. On note X le nombre d'enfants d'un couple pris au hasard dans la population.

Donner la loi de la variable aléatoire X . On suppose qu'une génération en âge de procréer est constituée de N couples, et on note X_1, \dots, X_N le nombre d'enfants respectif de chaque couple. On note enfin P la proportion de garçons issus de cette génération. Exprimer P en fonction de X_1, \dots, X_N . Quelle est la limite de P lorsque N tend vers l'infini. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 27 (*Théorème de Bernstein-Weierstrass*)

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} . Le n -ième polynôme de Bernstein de f , B_n , est défini par

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(k/n).$$

a) Soit $S_n(x)$ la variable aléatoire définie par $S_n(x) = \text{Bin}(n, x)/n$, où $\text{Bin}(n, x)$ est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et x .

(i) Vérifier que $B_n(x) = \mathbb{E}(f(S_n(x)))$.

(ii) Calculer $\mathbb{E}(S_n(x))$ et $\mathbb{V}(S_n(x))$.

b) Montrer que pour tout $\eta > 0$ et pour tout $x \in [0, 1]$

$$\mathbb{P}(|S_n(x) - x| \geq \eta) \leq \frac{1}{n\eta^2}.$$

c) On rappelle que f étant continue sur un segment, elle est également uniformément continue.

(i) Rappeler la définition de l'uniforme continuité.

(ii) Montrer que pour tout $\eta > 0$

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \mathbb{E}(|f(x) - f(S_n(x))| \mathbf{1}_{|S_n(x) - x| < \eta}) + 2 \|f\|_{\infty} \mathbb{P}(|S_n(x) - x| \geq \eta).$$

(iii) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|B_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \|f\|_{\infty} \mathbb{P}(|S_n(x) - x| \geq \eta).$$

d) Déduire des questions précédentes le Théorème de Bernstein-Weierstrass

$$\sup_{x \in [0,1]} |B_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$