

TD2 - APPLICATIONS MESURABLES

Exercice 1 (*Quiz*)

Soient f et g des applications d'un espace mesurable (E, \mathcal{T}) à valeurs dans \mathbb{R} muni de sa tribu borélienne. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement ou donner un contre-exemple.

- a) Si f est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable, alors $|f|$ est aussi $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.
- b) Si f et g sont $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurables, alors les fonctions $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont aussi $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurables.
- c) Si $|f|$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable, alors f est aussi $(\mathcal{T}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.

Exercice 2 (*Tribu grossière, triviale*)

Quelles sont les applications mesurables h de (E, \mathcal{T}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ lorsque \mathcal{T} est la tribu grossière ? lorsque \mathcal{T} est la tribu discrète ?

Exercice 3 (*Résultats essentiels à retenir*)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables d'un espace mesurable (E, \mathcal{T}) à valeurs dans \mathbb{R} muni de la tribu borélienne. Montrer que l'on a les propriétés suivantes :

- a) En considérant les images réciproques de $] -\infty, a]$ pour $a \in \mathbb{R}$, montrer que $\sup_n(f_n)$ est mesurable.
- b) Montrer que $\inf_n(f_n)$ est mesurable.
- c) Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f , montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f^{-1}(] -\infty, a]) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} f_k^{-1} \left(\left] -\infty, a + \frac{1}{p} \right] \right).$$

En déduire que f est mesurable.

Exercice 4 (*Une fonction mesurable non continue*)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f est mesurable mais n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 5 (*Une fonction monotone est mesurable*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone.

- a) Montrer que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(] -\infty, c])$ est convexe.
- b) En déduire que f est mesurable.

Exercice 6 (*Ensemble où deux fonctions mesurables coïncident*)

Soient f, g deux applications mesurables d'un espace mesurable (E, \mathcal{T}) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (muni de la tribu borélienne). Montrer que

$$\{x \in E \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{T}.$$

Exercice 7 (*Exemples de fonctions mesurables*)

On munit \mathbb{R} de la tribu des boréliens. Montrer que les fonctions suivantes sont mesurables :

- a) La fonction indicatrice de \mathbb{Q} .
- b) la fonction f définie par $f(x) = x + 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -x$ si $x \leq 0$.
- c) La dérivée g' d'une fonction dérivable g ; on remarquera que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(x + \frac{1}{n}) - g(x)}{\frac{1}{n}} = g'(x).$$

Exercice 8 (*Extension d'une fonction mesurable*)

Soient Ω un ensemble, \mathcal{T} une tribu sur Ω , E une partie mesurable de Ω et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{T}|_E - B(\mathbb{R})$ -mesurable. On définit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin E \\ f(x) & \text{si } x \in E \end{cases}.$$

Montrer que f est $\mathcal{T}|_E - B(\mathbb{R})$ -mesurable si et seulement si g est mesurable.

Exercice 9 (*DS1, 2024*)

Sur l'ensemble $\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ on note \mathcal{F} la plus petite tribu qui contient $\{-2, -1, 0\}$ et $\{0, 1, 2\}$.

- a) Expliciter \mathcal{F} en donnant la liste de ses éléments (sans justification).
- b) On munit \mathbb{R} de sa tribu borélienne. Parmi ces trois fonctions de Ω dans \mathbb{R} , lesquelles sont \mathcal{F} -mesurables ? Justifier vos réponses.
 - (i) la fonction nulle : $\forall \omega \in \Omega, f_0(\omega) = 0$;
 - (ii) la fonction identité : $\forall \omega \in \Omega, f_1(\omega) = \omega$;
 - (iii) la fonction signe : $\forall \omega \in \Omega, f_2(\omega) = -1$ si $\omega < 0$ et $f_2(\omega) = 1$ si $\omega \geq 0$.