

TD3 - MESURES ET MESURE DE LEBESGUE

Exemples et propriétés des mesures

Exercice 1 (*La mesure de comptage*)

Soit X un ensemble non vide. Pour $A \in \mathcal{P}(X)$, on pose

$$c(A) := \text{card}(A).$$

Montrer que c est une mesure sur $(X, \mathcal{P}(X))$. Cette mesure s'appelle la mesure de comptage sur X .

Exercice 2 (*Tribus des évènements triviaux*)

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On note

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(A) = 0 \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}.$$

Montrer que \mathcal{T} est une tribu.

Exercice 3 (*Mesures invariantes*)

Soit μ une mesure sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$. On suppose que μ est non nulle et invariante par translation, c.-à-d. pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mu(n + A) = \mu(A)$ où $n + A = \{n + p \mid p \in A\}$.

- a) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) \neq 0$.
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mu(\{n_0\}) = \mu(\{n\})$.
- c) En déduire que $\mu(\mathbb{Z}) = +\infty$.

Exercice 4 (*Ensembles de mesure positive*)

Soit $f : (E, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur (E, \mathcal{T}) .

- a) Montrer que si $\mu(E) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) \neq 0$ tel que f soit bornée sur A .
- b) Justifier que $\{f \neq 0\} \in \mathcal{T}$.
- c) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) \neq 0$ tel que $|f|$ est minorée sur A par une constante strictement positive.

Exercice 5 (*Continuité de la mesure*)

Soit (E, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On suppose que $\mu(\{x \in E \mid f(x) > 0\}) > 0$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mu(\{x \in E \mid f(x) > \varepsilon\}) > 0.$$

Exercice 6 (*Relations entre mesure, topologie et métrique*)

On note λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

- a) Soit U un ouvert borné de \mathbb{R} . Montrer que $\lambda(U) < +\infty$. La réciproque est-elle vraie ? (Considérez des ouverts centrés en n pour $n \in \mathbb{N}$.)
- b) Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ouvert U dense dans \mathbb{R} de sorte que $\lambda(U) \leq \varepsilon$. Pour cela, on pourra considérer une partie dense et dénombrable de \mathbb{R} .
- c) Soit A un borélien de \mathbb{R} . Montrer que si A contient un ouvert non vide, alors $\mu(A) > 0$. Si $B = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, que vaut $\lambda(B)$? B peut-il contenir un ouvert ?

Exercice 7 (*Lebesgue nulle et intérieur*)

Montrer que tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue nulle est d'intérieur vide.

Exercice 8 (*Un calcul avec la mesure de Lebesgue*)

On considère \mathbb{R} muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ . Pour $n \geq 0$, on pose $A_n =]n, n + 2^{-n}[$.

- a) Justifier que pour tout $n \geq 0$, on a $A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- b) Soit $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$. Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Calculer $\lambda(A)$.
- c) Un borélien de \mathbb{R} de mesure (de Lebesgue) finie est-il nécessairement borné ?

Exercice 9 (*Un deuxième calcul avec la mesure de Lebesgue*)

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombre réels. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, |x - a_n| \leq 2^{-n}\}$$

- a) Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- b) Montrer que $1 \leq \lambda(A) \leq 2$ (ici comme d'habitude λ désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}).
- c) Calculer $\lambda(A^c)$ où A^c désigne le complémentaire de A dans \mathbb{R} .
- d) Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
- e) Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = n$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 10 (*Continuité et notion de presque partout*)

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ (c.-à-d. la restriction à $[0, 1]$ de la mesure de Lebesgue). Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et supposons que f est nulle sur un borélien de mesure 1, c.-à-d. que $\lambda(f^{-1}(0)) = 1$. Montrer alors que f est identiquement nulle. Le résultat subsiste-t-il si on remplace continue par mesurable ?