

TD5 - VARIABLES À DENSITÉ

Dans toute la fiche, on supposera que les variables aléatoires d'un même exercice sont définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Autour de la fonction de répartition

Exercice 1 (*Fonction de répartition ?*)

Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions de répartition d'une variable aléatoire réelle ?

$$F(x) = \sin(x), \quad G(x) = \frac{1}{\pi} \left(\arctan(x) + \frac{\pi}{2} \right), \quad H(x) = \frac{1}{4} \mathbb{1}_{[-1,0[}(x) + \frac{3}{4} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x).$$

Exercice 2 (*Répartition uniforme*)

Soit X une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur $[0, 1]$.

- a) Quelle est la fonction de répartition de X ?
- b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y dans les cas suivants :
 - (i) $Y = 1 - X$;
 - (ii) $Z = a + (b - a)X$, où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Exercice 3 (*Le min est-il continu ?*)

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F_X . On pose $Z = \min(X, c)$ où c est un réel.

- a) Calculer la fonction de répartition de Z .
- b) Si la loi de X a pour densité f , est-ce que la loi de Z est encore à densité ?

Exercice 4 (*Somme de v.a. uniformes*)

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et Y la variable aléatoire définie par

$$Y(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \in [0, 1/4] \cup [3/4, 1]; \\ 1 - X(\omega) & \text{si } X(\omega) \in]1/4, 3/4[. \end{cases}$$

- a) Quelle est la loi de Y ?
- b) Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z := X + Y$ et vérifier que Z n'est ni discrète ni à densité.

Variables aléatoires à densité

Exercice 5 (*Interprétation du graphique d'une densité*)

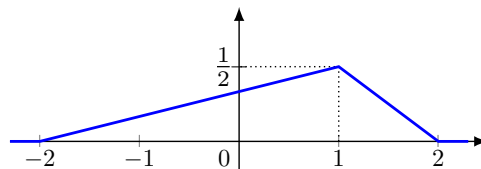
La variable aléatoire X a pour densité la fonction f ci-dessous :

- a) En exploitant les informations du graphique, donner les valeurs des probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}(X \leq -2), \quad \mathbb{P}(X = -1), \quad \mathbb{P}(X \in [-2; 0]),$$

$$\mathbb{P}(X > 1), \quad \mathbb{P}(X \geq 1), \quad \mathbb{P}(|X| > 1).$$

- b) Déterminer la fonction de répartition de X .



Exercice 6 (*Fonction de répartition à partir de densité*)

Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F donnée par

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad F(u) = \int_{-\infty}^u f(t) dt, \quad \text{avec} \quad f(t) = \begin{cases} 1+t & \text{si } t \in [-1, 0], \\ \alpha & \text{si } t \in]0, 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a) Représenter f .
 b) Calculer F , et en déduire α .
 c) Représenter F .

Exercice 7 (*Tige brisée, DS1 2024*)

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire à valeurs dans $]0, 1[$ et de loi uniforme sur $]0, 1[$. On pose

$$Z := \frac{1-X}{X}.$$

- a) Calculer explicitement la fonction de répartition de la variable aléatoire positive Z .
 Dessiner son graphe.
 b) La loi de Z est-elle à densité ? Si oui, la calculer et dessiner son graphe.
 c) Expliquer, si possible sans calcul, pourquoi Z et $1/Z$ ont *même loi*.
 d) On brise une tige de longueur 1 en choisissant au hasard le point de rupture suivant une loi uniforme sur $]0, 1[$. Quelle est la probabilité que l'un des deux morceaux soit plus de deux fois plus long que l'autre ?

Exercice 8 (*Loi de Rayleigh*)

Soit U une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$.

- a) Rappeler la fonction de répartition F_U de U .

Soit $\sigma > 0$. On définit une nouvelle variable aléatoire réelle, X , par

$$X = \sigma \sqrt{-2 \log U}.$$

- b) Calculer et représenter graphiquement la fonction de répartition F_X de X .
 c) La variable aléatoire X est-elle à densité ? Si oui, donner une densité de X et tracer son graphe.
 d) Retrouver sans calcul la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty t e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$.

Loi exponentielle

Exercice 9 (Simulation)

Soit $X \sim \mathcal{E}(a)$, une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $a > 0$, et dont on note F la fonction de répartition.

- Sur quel intervalle maximal F est-elle bijective ? Déterminer sa réciproque, G , sur cet intervalle.
- Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $Y := G(U)$. Quelle est la loi de Y ?
- Pour conclure, expliquer pourquoi il suffit et il est intéressant de considérer $-\frac{\log U}{a}$ pour simuler une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

Exercice 10 (Désintégration radioactive)

On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans \mathbb{R}_+ est *sans mémoire* si elle vérifie, pour tous $s, t > 0$.

$$\mathbb{P}(T > t + s) = \mathbb{P}(T > t) \mathbb{P}(T > s).$$

- Montrer que si T est une v.a. sans mémoire alors $\mathbb{P}(T > t + s \mid T > t) = \mathbb{P}(T > s)$, pour tous $s, t > 0$.
- Soit $T \sim \mathcal{E}(a)$ est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a , donc de densité $g(t) = a e^{-at} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(t)$. Montrer que T est sans mémoire.
- La durée de vie des atomes de radon suit une loi exponentielle. La probabilité qu'un atome de radon ne soit pas désintégré en 40s sachant qu'il ne l'est pas en 12s vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas désintégré avant 76s sachant qu'il ne l'est pas en 20s ?

Exercice 11 (Minimum de deux lois exponentielles)

- Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . On pose $Y = \min(X_1, X_2)$.
Pour tout réel y , calculer $\mathbb{P}(Y > y)$. En déduire que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
- (application) Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min (resp. 30 min). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et l'autre le guichet 2. En moyenne, après combien de temps sort le premier ? En moyenne, après combien de temps sort le deuxième ?

Loi normale

Dans cette section on suppose connues les valeurs de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Autrefois on lisait ces valeurs dans un tableau, de nos jours on utilise une « calculatrice » pour les obtenir.

Exercice 12 (*Notes des étudiants*)

On suppose que les notes d'un contrôle de probabilité suivent une loi normale de paramètre $(8, 5; 4)$.

- a) Quelle est la probabilité pour un étudiant d'avoir la moyenne?
- b) On veut améliorer les notes à l'aide d'une transformation affine $Y = aX + b$. Déterminer a et b pour qu'un étudiant ait la moyenne avec une probabilité de $1/2$ et une note supérieure à 8 avec une probabilité de $3/4$.

Exercice 13 (*Temps de transport*)

Les trajets dont il est question dans cet exercice sont censés suivre des lois normales et être indépendants.

- a) Un employé E quitte son domicile à 8h30. La durée moyenne de son trajet à son lieu de travail est 25 minutes et son écart-type 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il arrive avant 9h sur son lieu de travail?
- b) Un autre employé, F, doit utiliser consécutivement deux moyens de transport pour se rendre à son travail. Il prend le train à 8h20, et son bus démarre à 8h45. La durée moyenne de son trajet en train est 23 minutes et, d'autre part, la probabilité que ce trajet dure entre 18 et 28 minutes est 0,6915. La durée moyenne de son trajet en bus est 14 minutes et son écart-type est 2 minutes. Quel est l'écart-type du trajet en train? Quelle est la probabilité que F arrive avant 9h sur son lieu de travail?
- c) Seuls E et F ont une clé de leur lieu de travail. Quelle est la probabilité que cette agence ouvre avant 9h?
- d) Même question dans l'hypothèse où ils doivent être présents tous deux pour l'ouverture.
- e) On rappelle qu'en l'état actuel des choses, le voyage dans le temps n'existe pas. Est-il raisonnable de modéliser un temps de trajet par une loi normale?

Exercice 14 (*Premiers mots et normalité*)

Un chercheur s'intéresse à l'âge moyen auquel les premiers mots du vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants. Il effectue une étude auprès d'un millier de jeunes enfants. Cette étude montre que les premiers mots apparaissent, en moyenne, à 11,5 mois, avec un écart-type de 3,2 mois. Le chercheur décide alors de modéliser cet âge par une variable aléatoire réelle X de loi normale $\mathcal{N}(11, 5; 3, 2)$.

- a) Calculer la probabilité qu'un enfant acquière ses premiers mots avant l'âge de 10 mois?
- b) Calculer la probabilité qu'un enfant acquière ses premiers mots après l'âge de 18 mois?
- c) Afin de détecter d'éventuels problèmes de langage chez un jeune enfant, on décide de définir un seuil d'alerte s (en mois), à partir duquel on considérera qu'il n'est pas « normal » qu'un enfant n'ait pas acquis ses premiers mots. Le chercheur propose donc de choisir s tel que la probabilité pour qu'un enfant ait acquis ses premiers mots avant s mois soit de 99,8%. Déterminer s .

Exercice 15 (*Loi du χ^2*)

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ et $Z = X^2$. Calculer la fonction de répartition et la densité de Z .

Remarque : la loi de Z est appelée loi du χ^2 à 1 degré de liberté.