

SOLUTIONS DU DEVOIR SURVEILLÉ

1 mars 2025

[durée : 2 heures]

Exercice 1

On considère \mathbb{R} muni de la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ .

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels. On pose

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, |x - a_n| \leq 2^{-n}\}.$$

- a) Justifier que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. *Indication : considérer les $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a_n| \leq 2^{-n}\}$.*
- b) Montrer que $1 \leq \lambda(A) \leq 2$.
- c) Calculer $\lambda(A^c)$ où A^c désigne le complémentaire de A dans \mathbb{R} .
- d) Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.
- e) Calculer $\lambda(A)$ lorsque $a_n = n$ pour tout $n \geq 1$.
- f) Un borélien de \mathbb{R} ayant une mesure de Lebesgue finie, est-il nécessairement borné ?

Solution :

- a) Les $A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a_n| \leq 2^{-n}\} = [a_n - 2^{-n}, a_n + 2^{-n}]$ sont des intervalles fermés, donc sont des boréliens. Ainsi $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ est une union dénombrable de boréliens, donc, c'est un borélien.
- b) Nous avons $\lambda(A_n) = 2^{-(n-1)}$. De plus, on a $\lambda(A_1) \leq \lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n)$. Et comme $\lambda(A_1) = 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda(A_n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = 2$, on a $1 \leq \lambda(A) \leq 2$.
- c) Comme $\lambda(A) + \lambda(A^c) = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$, on a $\lambda(A^c) = +\infty - \lambda(A) = +\infty$, puisque $\lambda(A) \leq 2$. Donc $\lambda(A^c) = +\infty$.
- d) Soient $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Alors $A_n = [-2^{-n}, 2^{-n}] \supset [-2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)}] = A_{n+1}$, donc $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = A_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Ainsi $\lambda(A) = 1$. Par conséquent, la borne inférieure de $\lambda(A)$ est optimale.
- e) Soient $a_n = n$ pour tout $n \geq 1$, avec $A_n = [n - 2^{-n}, n + 2^{-n}]$. Et comme, pour $n < m$, on a $n + 2^{-n} < m - 2^{-m}$, il en résulte que les A_n sont tous disjoints. Ainsi $\lambda(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \lambda(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} 2^{-n} = 2$. Par conséquent, la borne supérieure de $\lambda(A)$ est optimale.
- f) Dans le cas de la question précédente A est un borélien non borné, car contenant \mathbb{N}^* , de mesure finie 2. Donc, un borélien de \mathbb{R} ayant une mesure de Lebesgue finie n'est pas nécessairement borné.

Exercice 2

- a) Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer son espérance $\mathbb{E}(X)$ à l'aide d'un calcul explicite, vu en cours.
- b) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.
- (i) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = n)$.
- (ii) En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$.

Solution :

- a) Comme $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, nous avons $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Ainsi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

- b) (i) Nous avons, pour $n \in \mathbb{N}$, en utilisant l'indépendance de X_1 et X_2 ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = n) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k, X_2 = n - k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_2 = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

- (ii) Pour trouver $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, nous pouvons utiliser les questions précédentes pour affirmer que $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$. Mais nous pouvons aussi nous passer de la question précédente en utilisant la linéarité de l'espérance, puis la question (a), pour obtenir $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \lambda_1 + \lambda_2$.

Exercice 3

Pour une certaine expérience aléatoire, l'ensemble des résultats possibles est

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, \dots\} = \mathbb{N} - \{0, 1\}$$

et l'ensemble des événements observables est $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

- a) À quelles conditions sur la famille de réels $(p_i)_{i \geq 2}$ définit-on une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) en posant $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$ pour chaque i de Ω ?
- b) Vérifier que ces conditions sont réalisées pour les

$$p_i = (i-1) \frac{2^{i-2}}{3^i}, \quad i \geq 2.$$

Indication : on pourra utiliser directement la formule du cours donnant l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, à condition de préciser clairement son application dans ce cas.

On tire un nombre N au hasard en utilisant cette expérience. On a alors

$$\mathbb{P}(N = i) = (i - 1) \frac{2^{i-2}}{3^i}, \quad \forall i \geq 2.$$

Une fois N déterminé, on choisit au hasard (avec équiprobabilité) un entier X tel que $0 < X < N$.

- c) Déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X = k \mid N = i)$ pour chaque $k \geq 1$ et chaque $i \geq 2$.
- d) En déduire $\mathbb{P}(X = k)$. Quelle est la loi de X ?
- e) Calculer les $\mathbb{P}(N - X = j \mid N = i)$ et trouver, sans calcul, la loi de la variable aléatoire $N - X$.
- f) Les variables X et $N - X$ sont-elles indépendantes ?

Solution :

- a) Une probabilité sur un ensemble dénombrable de valeurs est donnée par une suite de nombres positifs de somme 1. Pour $\Omega = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$, la famille des réels $(p_i)_{i \geq 2}$ définit une probabilité si les p_i sont tous positifs et si $\sum_{i=2}^{+\infty} p_i = 1$.
- b) Il est clair que, pour tout $i \geq 2$, on a $p_i = (i - 1) \frac{2^{i-2}}{3^i} \geq 0$. D'autre part, un rapide changement de variable donne

$$\sum_{i=2}^{+\infty} p_i = \sum_{i=2}^{+\infty} (i - 1) \frac{2^{i-2}}{3^i} = \sum_{j=1}^{+\infty} j \frac{2^{j-1}}{3^{j+1}}.$$

On utilise ici l'espérance d'une loi géométrique de paramètre $1/3$, qui vaut 3 :

$$\sum_{i=2}^{+\infty} p_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{+\infty} j \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} = \frac{1}{3} \times 3 = 1.$$

- c) Une fois que N est déterminé, on choisit au hasard avec équiprobabilité un entier X tel que $0 < X < N$. Par conséquent $\mathbb{P}(X = k \mid N = i) = \frac{1}{i-1}$ car il y a $i - 1$ valeurs possibles strictement comprises entre 0 et i . Ceci est valable pour tous les k tels que $0 < k < i$. Quand $k \geq i$ on a $\mathbb{P}(X = k \mid N = i) = 0$.

- d) On fixe k dans \mathbb{N}^* et on calcule $\mathbb{P}(X = k)$ grâce à la formule de conditionnement par tous les cas possibles :

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = i) \mathbb{P}(N = i)$$

la probabilité conditionnelle est nulle sauf si $i > k$ i.e. $i \geq k + 1$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k \mid N = i) \mathbb{P}(N = i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{1}{i-1} \times (i-1) \frac{2^{i-2}}{3^i} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=k+1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{4} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

X suit la loi géométrique de paramètre $1/3$.

- e) Quand on sait que $N = i$ dire que $N - X = j$ revient à dire que $X = i - j$:

$$\mathbb{P}(N - X = j \mid N = i) = \mathbb{P}(X = i - j \mid N = i) = \begin{cases} \frac{1}{i-1} & \text{si } i > j > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate que les $\mathbb{P}(N - X = j \mid N = i)$ sont égales aux $\mathbb{P}(X = j \mid N = i)$. Le calcul de la loi de $N - X$ sera donc identique au calcul de la loi de X , et donnera le même résultat : $N - X$ suit la loi géométrique de paramètre $1/3$.

- f) Pour tout k et tout j de \mathbb{N}^*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k, N - X = j) &= \mathbb{P}(X = k, N = j + k) \\ &= \mathbb{P}(X = k \mid N = k + j) \mathbb{P}(N = k + j) \\ &= \frac{1}{k + j - 1} \times (k + j - 1) \frac{2^{k+j-2}}{3^{k+j}} \\ &= \frac{2^{k+j-2}}{3^{k+j}}, \end{aligned}$$

et puisque X et $N - X$ suivent la loi géométrique de paramètre $1/3$,

$$\mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(N - X = j) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} = \frac{2^{k+j-2}}{3^{k+j}}.$$

Ainsi $\mathbb{P}(X = k, N - X = j) = \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(N - X = j)$ et par conséquent X et $N - X$ sont indépendantes.