

## TD6 - INTÉGRALE DE LEBESGUE

## Autour du théorème de convergence monotone

**Exercice 1** (*Inversion intégrale et limite ?*)

On note  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $f_n = \mathbb{1}_{[n, 2n]}$ . Vérifier que les  $f_n$  sont positives et mesurables. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$  et  $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda$ .

**Exercice 2** (*Calcul d'une intégrale limite*)

On pose  $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- On définit pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathbb{1}_{[0, n]}(x)$ . En étudiant  $g_n(x) = (n+1) \log\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n \log\left(1 - \frac{x}{n}\right)$ , montrer que  $(f_n)_n$  est une suite croissante de fonctions.
- En déduire que  $I(\alpha) := \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(\alpha)$  existe et calculer sa valeur en fonction de  $\alpha$ .

**Exercice 3** (*Théorème de convergence décroissante*)

Pour  $n \geq 0$ , on définit les fonctions  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[n, +\infty[}(x)$ .

- Les fonctions  $f_n$  sont-elles intégrables sur  $\mathbb{R}$  ?
- Dans le théorème de convergence monotone, peut-on remplacer « croissante » par « monotone » ?
- Soit  $(g_n)_n$  est une suite décroissante de fonctions réelles sur un espace mesuré. Montrer que s'il existe  $n_0$  tel que  $g_{n_0}$  soit intégrable, la conclusion du théorème de convergence monotone s'applique.

**Exercice 4** (*Interversion série intégrale*)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables et positives de  $(E, \mathcal{T}, \mu)$  dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

- Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) d\mu.$$

- En déduire la valeur de  $\sum_{n=3}^{+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx$ .
- Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ , soit  $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ .
  - Montrer que  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  est une série convergente pour tout  $x > 0$  et calculer sa somme  $f(x)$ .
  - Comparer  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ . Expliquer.

## Théorème de convergence dominée

### Exercice 5 (*Limites d'intégrales*)

Calculer les limites suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| <p>a) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^2x^2+1} dx,</math></p> <p>b) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx,</math></p> <p>c) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx,</math></p> <p>d) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \frac{n}{x(1+x^2)} dx,</math></p> <p>e) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{- x } dx,</math></p> | <p>f) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{x}{n}\right) e^{-x} dx,</math></p> <p>g) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[-n,n]} \frac{\arctan(1+x^2/n)}{1+x^2} dx,</math></p> <p>h) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} (1+nx^2)(1+x^2)^{-n} dx,</math></p> <p>i) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,+\infty[} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{1/n}} dx,</math></p> <p>j) <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,+\infty[} \frac{n}{1+n^2x^2} dx, a &gt; 0.</math></p> |
|---|--|

### Exercice 6 (*Limites de séries*)

En ré-écrivant les séries comme des intégrales par rapport à la mesure de comptage, calculer

- |   |  |
|---|--|
| <p>a) <math>\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \left( 1 + \frac{1}{k(n+1)} \right) \right)</math></p> | <p>b) <math>\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{n}{k}\right)}{2^n} \right)</math></p> |
|---|--|

### Exercice 7 (*Intégration sur des « petits » ensembles*)

Soit  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  un espace mesuré et soit  $f$  une fonction intégrable.

- a) Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'ensembles mesurables tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mu(A_n) < \frac{1}{n^2}$ . On pose  $f_n = |f| \mathbb{1}_{A_n}$ .  
Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 0$ . En déduire que pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , la suite  $(f_n(x))_n$  est nulle à partir d'un certain rang.
- b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = 0$ .
- c) En déduire que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $A \in \mathcal{B}$ ,  $\mu(A) < \delta$  implique  $\int_A |f| d\mu < \varepsilon$ .

### Exercice 8 (*Série d'intégrales*)

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{L}^1(\mu)$ . On suppose que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty.$$

- a) Montrer que  $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| d\mu < \infty$ . En déduire que  $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$  converge  $\mu$ -presque partout.
- b) Montrer que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  converge pour  $\mu$ -presque tout  $x$  et à un ensemble négligeable près définit une fonction  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .
- c) Montrer que l'on a

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

- d) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\log(x)}{1-x} dx.$$