

TD7 - LOIS CLASSIQUES CONTINUES ET MOMENTS

La loi uniforme

Exercice 1 (*Loi uniforme*)

Une variable aléatoire réelle continue X prenant des valeurs dans $[a, b]$ est appelée *uniforme*, et on note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, si sa fonction densité est :

$$\rho_X = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}.$$

- a) Calculez la moyenne $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X .
- b) Pour quelles a et b , la variable X est centrée réduite ?
- c) Calculez les moments $\mathbb{E}(X^n)$ de X pour $n \in \mathbb{N}$.
- d) Si U est uniforme sur $[0, 1]$, quelle est la distribution de $aU + b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$? En déduire la distribution de $1 - U$.
- e) *Application.* Le temps d'attente (en minutes) pour accéder à des données suit une loi uniforme $\mathcal{U}([1, 7])$. Déterminer l'espérance du temps d'attente et son écart type.

Exercice 2 (*Fonctions de la loi uniforme*)

- a) Soit $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$ une variable aléatoire réelle de loi uniforme et $X = P(U) = a_n U^n + \dots + a_1 U + a_0$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ en fonction des $(a_i)_{i=0, \dots, n}$.
- b) Soit $Y \sim \mathcal{U}([0, \pi])$, une variable aléatoire réelle de loi uniforme. Calculer $\mathbb{E}(\sin(Y))$ et $\mathbb{V}(\sin(Y))$, ainsi que $\mathbb{E}(\cos(Y))$ et $\mathbb{V}(\cos(Y))$.

Exercice 3 (*Simulation par la loi uniforme*)

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X . Pour $u \in]0, 1[$, on pose

$$G(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}.$$

On appelle G l'inverse généralisée de F .

- a) Montrer que $\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}$ est un intervalle fermé minoré et non majoré. En déduire que G est bien définie et que $\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\} = [G(u), +\infty[$.
- b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $u \in]0, 1[$,

$$F(x) \geq u \iff x \geq G(u).$$

- c) Pour $U \sim \mathcal{U}(]0, 1[)$, quelle est la fonction de répartition de $G(U)$? Conclure.
- d) Trouver G telle que $G(U)$ soit discrète uniforme sur $\{n, n+1, \dots, m\}$ quand $U \sim \mathcal{U}(]0, 1[)$.

Exercice 4 (*Ni continue, ni discrète*)

Pour X variable positive de fonction de répartition F_X , démontrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} 1 - F_X(t) dt \quad \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Indication : Utiliser l'exercice précédent pour écrire $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 G(t) dt$.

Soit X une variable uniforme sur $[1, 3]$ et $a \in [1, 3]$.

- a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = \min\{X, a\}$?
- b) Admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
- c) Que vaut cette espérance si $a = 1$? $a = 3$? Est-ce que vous auriez pu trouver ces deux résultats autrement ?

D'autres lois classiques**Exercice 5** (*Loi exponentielle*)

Une variable aléatoire réelle positive X est appelée *exponentielle* avec le paramètre $\lambda > 0$ si X admet pour fonction densité :

$$\rho_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ pour } t \in \mathbb{R}_+.$$

- a) Calculez la moyenne $\mathbb{E}(X)$, la variance $\mathbb{V}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X .
- b) Déterminer une fonction G telle que pour $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, la variable $G(U)$ soit exponentielle.

Exercice 6 (*Loi normale*)

Soit X une variable aléatoire normale centrée réduite.

- a) Justifier que X admet des moments à toute ordre.
- b) Que valent $\mathbb{E}(X^{2n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$?
- c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \mathbb{E}(X^{2n})$. Montrer que $c_n = (2n-1)c_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire une formule explicite pour $\mathbb{E}(X^{2n})$.
- d) En déduire $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 7 (*Loi de Cauchy*)

Une variable aléatoire réelle X est dite *de Cauchy standard* si la fonction densité de X est :

$$\rho_X(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)} \text{ pour } t \in \mathbb{R}.$$

- a) Calculez l'espérance $\mathbb{E}(X)$, si elle existe.
- b) Montrer que $\sigma X + \mu$ est une variable continue et calculer sa densité.
Nous appelons cette distribution une distribution Cauchy avec les paramètres (μ, σ) .
- c) Déterminer une fonction G telle que pour $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, la variable $G(U)$ soit de Cauchy standard.

Exercice 8 (*Loi de Laplace*)

On considère une variable aléatoire X dont la densité est donnée par $f(x) = ce^{-|x|}$.

- a) Calculer c .
- b) Démontrer que X admet des moments de tout ordre. Les calculer.

Variables continues - supplément**Exercice 9** (*Consommation d'eau*)

La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f a la forme :

$$\rho(t) = c(t-a)(b-t)\mathbb{1}_{[a,b]}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où a, b, c sont des constantes strictement positives ($a < b$).

- a) Vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b (t-a)^n (b-t) dt = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

- b) Exprimer la constante c en fonction de a et b .
- c) Calculer $\mathbb{E}(X-a)$ et $\mathbb{E}((X-a)^2)$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
- d) Donner la fonction de répartition F de la variable aléatoire X . Donner l'allure des représentations graphiques de ρ et F . Proposer une interprétation physique des constantes a et b .

Exercice 10 (*Loi log-normale*)

On dit qu'une variable positive X suit une loi log-normale si $Y = \ln X$ suit une loi normale centrée réduite.

- a) Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition ϕ de la loi normale centrée réduite. Calculer sa densité.
- b) Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \sqrt{e}$.

Exercice 11 (*Loi log-normale, DS2 de 2024*)

Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}^*$. Une variable aléatoire X à valeurs dans $]0, +\infty[$ est dite suivre une loi *log-normale* de paramètres (μ, σ^2) si $Y = \log X$ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On note $\mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$ la loi log-normale de paramètres (μ, σ^2) .

- a) Exprimer X à l'aide d'une variable Z (à préciser) qui suit une loi normale centrée réduite. En déduire la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction Φ de répartition de Z . Calculer ensuite explicitement la densité de X .
- b) Calculer l'espérance de X .
- c) Montrer que $X^r \sim \mathcal{L}(r\mu, r^2\sigma^2)$ pour tout $r \neq 0$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. Calculer la variance de X .
- d) Calculer $\mathbb{E}(e^{uX})$ pour tout $u > 0$.

Exercice 12 (*Entropie*)

Étant donné X une variable aléatoire réelle de densité f_X , on appelle entropie de X la quantité suivante, si elle existe,

$$h(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \log f_X(t) dt.$$

- a) Calculer l'entropie d'une loi aléatoire uniforme sur le segment $[a, b]$.
- b) On suppose que X suit une loi normale, d'espérance m et variance σ^2 , i.e. $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, dont on rappelle la densité

$$f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

- (i) Rappeler l'expression de l'espérance et de la variance de X , sous formes d'intégrales de f_X .
- (ii) Montrer que $h(X) = \frac{1}{2}(1 + \log(2\pi\sigma^2))$.
- c) On souhaite prouver que, parmi les variables aléatoires de variance donnée, les lois normales admettent une entropie maximale. On fixe Y une variable aléatoire réelle centrée (c'est-à-dire d'espérance nulle), de densité f_Y et de variance σ^2 , admettant une entropie. On note φ la densité d'une loi normale centrée ($m = 0$), de variance σ^2 . On suppose que les fonctions

$$t \mapsto f_Y(t) \log \frac{\varphi(t)}{f_Y(t)} \quad \text{et} \quad t \mapsto f_Y(t) \log \varphi(t)$$

sont intégrables sur \mathbb{R} .

- (i) Démontrer que pour tout $t > 0$, $\log t \leq t - 1$.
- (ii) Vérifier que

$$h(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) \log \frac{\varphi(t)}{f_Y(t)} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t) \log \varphi(t) dt.$$

- (iii) En déduire que $h(Y) \leq \frac{1}{2}(1 + \log(2\pi\sigma^2))$.