

TD1 - EVÉNEMENTS ET TRIBUS

Rappels : probabilité, indépendance, conditionnement

Exercice 1 (*Quiz*)

Pour chacune des assertions suivantes, donner soit une preuve, soit un contre-exemple.

- a) Si A et B sont deux événements indépendants et incompatibles alors l'un des deux événements au moins est de probabilité nulle.
- b) Si l'un des événements A ou B est de probabilité nulle alors A et B sont indépendants et incompatibles.
- c) Si un événement A est indépendant d'un événement B et d'un événement C , alors il est indépendant de $B \cup C$.
- d) Si un événement A est indépendant d'un événement B et si C est un événement tel que $C \subset B$ alors A est indépendant de C .

Exercice 2 (*Une inégalité injustement méconnue*)

Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on note A un événement quelconque et B un événement tel que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$.

- a) Montrez que

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4} |\mathbb{P}(A | B) - \mathbb{P}(A | B^c)|. \quad (\star)$$

Indication : Commencez par exprimer $\mathbb{P}(A | B) - \mathbb{P}(A | B^c)$ en fonction des seules probabilités $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$.

- b) Que donne l'inégalité (\star) lorsque $A \subset B$?
- c) Dans quels cas (\star) est-elle une égalité?

Exercice 3 (*Être de probabilité 1 ou ne pas être*)

- a) Quelle est la probabilité d'une intersection dénombrable d'événements de probabilité 1?
- b) Peut-il exister n événements indépendants de même probabilité p dont la réunion soit l'espace Ω tout entier?

Exercice 4 (*Tirer un nombre réel au hasard*)

On décide de « tirer au hasard » un réel $x \in [0, 1[$. Pour cela on effectue — par la pensée ! — une infinité de tirages avec remise dans une urne contenant des boules marquées chacune d'un chiffre décimal. On construit x en écrivant — toujours par la pensée — son développement décimal illimité, le numéro sorti au i^{e} tirage fournissant le i^{e} chiffre décimal de x . La composition précise de l'urne est inconnue. On sait seulement qu'il y a au moins une boule marquée 0, qu'il n'y a aucune boule marquée 9 et qu'il y a au moins une boule marquée d'un autre chiffre que 0. Comme aucune boule dans l'urne n'est marquée 9, le développement décimal illimité ainsi obtenu est forcément propre. On note p la probabilité de sortir une boule marquée 0 au i^{e} tirage. En raison du mode de tirage (une boule avec remise) et de la composition de l'urne, il est clair que p ne dépend pas de i et que $0 < p < 1$.

Pour chaque i de \mathbb{N}^* on note N_i l'événement :

$$N_i := \{\text{le } i^{\text{e}} \text{ chiffre de } x \text{ après la virgule est un zéro}\}$$

Les N_i sont indépendants et tous de probabilité p .

a) Exprimer par des opérations ensemblistes sur les N_i les événements :

$$D_n := \{\text{l'écriture décimale illimitée de } x \text{ ne comporte que des zéros à partir du rang } n\},$$

$$D := \{x \text{ est un nombre décimal}\},$$

$$E := \{\text{l'écriture de } x \text{ comporte une infinité de zéros}\}.$$

Comparer D et E .

b) Donner $\mathbb{P}(\{x < 10^{-4}\})$. Les N_i , $i \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?

c) Calculer la probabilité de l'événement

$$F_n := \{\text{le premier chiffre non-nul après la virgule est au rang } n\}.$$

Les F_n , $n \in \mathbb{N}^*$, sont-ils deux à deux disjoints ?

d) Écrire $\bigcup_{i=1}^{+\infty} N_i^c$ à l'aide des F_n et calculer sa probabilité. En déduire $\mathbb{P}(\{x = 0\})$.

e) Pour $m \in \mathbb{N}^*$, calculer la valeur de $\mathbb{P}(D_m)$. On pourra utiliser la monotonie de la suite $(G_n)_{n \geq m}$ où $G_n := \bigcap_{i=m}^n N_i$.

f) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre décimal avec ce type de tirage aléatoire ?

g) Reprendre la question précédente avec une urne dans laquelle on a rajouté une boule numérotée 9.

Exercice 5 (*Fonction non Riemann intégrable*)

- a) Soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Vérifier que h est Riemann intégrable.

- b) Considérons $f(x) = \mathbb{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}}(x)$. Montrer que f n'est pas Riemann intégrable sur $[0, 1]$.

- c) Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{ avec } \text{pgcd}(p, q) = 1, 0 < p \leq q, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est Riemann intégrable et que $f = h \circ g$. Que peut-on en déduire ?

- d) On rappelle que $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ est dénombrable et on note $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une numérotation de cet ensemble.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \mathbb{1}_{\{r_1, \dots, r_n\}}(x)$.

Montrer que f_n est Riemann intégrable sur $[0, 1]$.

- e) Montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers f . Que peut-on en déduire ?

Exercice 6 (*Limites supérieures et inférieures d'ensemble*)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble Ω , on définit

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq n} A_p \quad \text{et} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{p \geq n} A_p.$$

- a) Justifier que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments de Ω appartenant à une infinité de A_n et $\liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments de Ω appartenant à tous les A_n sauf à un nombre fini.

- b) Montrer que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

- c) Montrer que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

- d) Montrer que $\mathbb{1}_{\bigcup_{p \geq n} A_p} = \sup_{p \geq n} \mathbb{1}_{A_p}$ et $\mathbb{1}_{\bigcap_{p \geq n} A_p} = \inf_{p \geq n} \mathbb{1}_{A_p}$. En déduire les que $\mathbb{1}_{\limsup A_n} = \limsup \mathbb{1}_{A_n}$ et $\mathbb{1}_{\liminf A_n} = \liminf \mathbb{1}_{A_n}$.

- e) Montrer que

(i) $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$.

(ii) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

(iii) $\limsup A_n = \{x \in \Omega \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}(x) = +\infty\}$.

(iv) $\liminf A_n = \{x \in \Omega \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n^c}(x) < +\infty\}.$

(v) $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n.$

(vi) $\limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup A_n \cap \limsup B_n.$

f) Calculer $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ dans les cas suivants :

(i) $A_n =]-\infty, a_n]$ avec $a_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ et $a_{2p+1} = -1 - \frac{1}{2p+1}.$

(ii) $A_{2p} =]0, 3 + \frac{1}{3p}[$ et $A_{2p+1} =]-1 - \frac{1}{3p}, 2].$

(iii) $A_k = p_k \mathbb{N}$ où $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite des nombres premiers.

Tribus

Exercice 7

On rappelle que la tribu des boréliens de \mathbb{R}^2 est engendrée par les ouverts de \mathbb{R}^2 . Démontrer que les ensembles suivants sont des boréliens de \mathbb{R}^2 :

a) $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}.$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ et } x \notin \mathbb{Q}\}.$

Exercice 8 (Quiz)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier brièvement ou donner un contre-exemple.

a) Soient \mathcal{T} et \mathcal{T}' deux tribus sur Ω . Alors $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ est une tribu sur Ω .

b) Si A est un ensemble inclus dans un ensemble B mesurable, alors A est mesurable.

Exercice 9 (Union et intersection de tribus)

a) Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}.$

(i) Identifier la tribu \mathcal{F}_1 , engendrée par le singleton $\{1\}$ et la tribu \mathcal{F}_2 engendrée par $\{2\}.$

(ii) Identifier $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. Est-ce que ce sont des tribus ?

b) Soit Ω un ensemble quelconque et \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 des collections d'ensembles de Ω . Donc $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{P}(\Omega).$

(i) Montrer que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{C}_1} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{C}_2}.$

(ii) Montrer qu'il n'est pas toujours vrai que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_1} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{C}_2} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2}.$

c) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega).$

(i) Soit $\mathcal{C}^c = \mathcal{P}(\Omega) \setminus \mathcal{C}$. Est-il vrai que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} \cap \mathcal{F}_{\mathcal{C}^c} = \emptyset$? Est-il vrai que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} = \mathcal{F}_{\mathcal{C}^c}$?

(ii) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et soit $\mathcal{D} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid A^c \in \mathcal{C}\}.$ Est-il vrai que $\mathcal{F}_{\mathcal{C}} = \mathcal{F}_{\mathcal{D}}$?

Exercice 10 (*Tribu, expérience, information*)

- a) On lance un dé à quatre faces. Ecrire l'ensemble Ω de tous les résultats possibles.
- b) Une personne lance le dé et nous annonce le résultat tiré. Ecrire la tribu \mathcal{F}_2 de tous les événements observables pour nous.
- c) La personne lance le dé et nous annonce seulement « pair » ou « impair ». Ecrire la tribu \mathcal{F}_1 des événements observables pour nous.
- d) La personne lance le dé et n'annonce rien ! A quelle la tribu \mathcal{F}_0 correspond cette fois l'expérience que nous observons ?
- e) On dit que $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ est une suite croissante de tribus. En quoi est-elle croissante ? Qu'est-ce qui augmente, intuitivement, le long de cette suite ? Dans l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , que représente la tribu \mathcal{F} ?
- f) La modélisation mathématique des produits financiers dérivés (stock-options) utilise des espaces probabilisés complexes. Ils sont munis de tribus \mathcal{F}_t indexées par la date et contenant tous les événements observables de l'origine jusqu'à la date t . L'affirmation $\mathcal{F}_{24 \text{ février } 2022} \subset \mathcal{F}_{1 \text{ avril } 2024}$ est considérée par les quants comme une évidence. Pourquoi ? Quelle capacité (réaliste ?) pré-suppose ce choix de modélisation ?

Exercice 11 (*Une tribu sur les entiers*)

Soit $\Omega = \mathbb{Z}$. On considère \mathcal{T} la tribu engendrée par les ensembles

$$S_n = \{n, n+1, n+2\}, \quad \text{avec } n \in \mathbb{Z}.$$

- a) Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, $\{n\}$ appartient à \mathcal{T} .
- b) En déduire \mathcal{T} .

Exercice 12 (*Tribu engendrée par une partition*)

Soit E un ensemble et $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de E , c'est-à-dire

$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad E_i \cap E_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Montrer que

$$\sigma(\{E_1, E_2, \dots, E_n\}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} E_i : I \subset \{1, 2, \dots, n\} \right\}.$$

Exercice 13 (*Ensemble engendrant la tribu borélienne*)

Soit $\mathcal{B}([0, 1[)$ la tribu Borélienne sur $]0, 1[$.

- a) Montrer que tout ouvert de $]0, 1[$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles de $]0, 1[$ de la forme $[r - \delta, r + \delta]$ où r et δ sont des rationnels de $]0, 1[$.
- b) Montrer que $\mathcal{B}([0, 1[)$ est engendrée par chacune des familles suivantes :
 - (i) $\mathcal{C}_1 = \{[a, b], a \leq b, a, b \in]0, 1[\}$.
 - (ii) $\mathcal{C}_2 = \{[a, b], a \leq b, a, b \in]0, 1[\cap \mathbb{Q} \}$.

(iii) $\mathcal{C}_3 = \{]0, t], t \in]0, 1[\}$.

(iv) $\mathcal{C}_4 = \{]0, \frac{1}{2^n}[, [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[, n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, 2^n - 1\} \}$.

c) Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille suivante d'ensembles de $]0, 1[$:

$$\mathcal{T}_n = \sigma\left(\left]0, 1/2^n[, \left[k/2^n, (k+1)/2^n[, k \in \{1, \dots, 2^n - 1\}\right)\right).$$

Montrer que la suite des $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion mais que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu.

Indication : On pourra vérifier que

$$\{1/2\} = \bigcap_{n \geq 1} \left[\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n + 1}{2^n} \right[,$$

pour une certaine suite d'entiers $k_n \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$ et raisonner par l'absurde en montrant que si $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ est une tribu, alors $\{1/2\} \in \mathcal{T}_n$, pour un certain n . On conclura à une absurdité en utilisant l'exercice 12.

Exercice 14 (Tribu engendrée par les singletons) Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) : A \text{ dénombrable ou } \Omega \setminus A \text{ dénombrable}\}$.

- a) Vérifier que \mathcal{T} est une tribu sur Ω .
- b) Montrer que la tribu engendrée par les singletons de Ω est \mathcal{T} .
- c) Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties finies de Ω ?

Exercice 15 (Points de convergence d'une suite d'applications)

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite d'applications mesurables de \mathbb{R} dans lui-même.

- a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(f_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers l si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $l \geq k$, $|f_l(x) - l| < \frac{1}{n}$.
- b) Soit $A := \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$. Montrer que

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{l \geq k} f_l^{-1}] -1/n, 1/n[.$$

En déduire que A est un borélien de \mathbb{R} .

- c) Montrer que $B := \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ admet } 0 \text{ comme valeur d'adhérence}\}$ est un borélien de \mathbb{R} .
- d) Montrer que $C := \{x \in \mathbb{R} : (f_n(x))_{n \geq 1} \text{ admet une limite}\}$ est un borélien de \mathbb{R} .

Indication : Utiliser le critère de Cauchy pour caractériser l'existence d'une limite.