

# Programmation Numérique

Polytech Lille — IS 3 — Cours 1

5 octobre 2023

# Présentation

- Introduction à l'algorithmique numérique (interpolation polynomiale et intégration numérique)
- Complété par *Algèbre Linéaire Numérique* (S6) et *Algorithmique Numérique pour l'Optimisation* (S7)
- Trois CM, sept TP, un contrôle TP (une heure trente, sans document)
- L'essentiel se passe en TP : les questions de programmation en Python visent à vous faire acquérir, par vous même, des notions simples d'algorithmique numérique et un peu de familiarité avec la documentation scientifique Python



- `numpy` (numerical Python)
- `scipy` (scientific Python) construit au-dessus de `numpy`
- les manipulations élémentaires de tableaux, matrices sont implantées `numpy` et les algorithmes scientifiques évolués en `scipy`
- un objectif pédagogique important : comprendre la documentation de ces bibliothèques
- En TP : Spyder (contrôle TP !)

# Interpolation polynomiale

**Thm** Étant donnés  $n + 1$  points

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

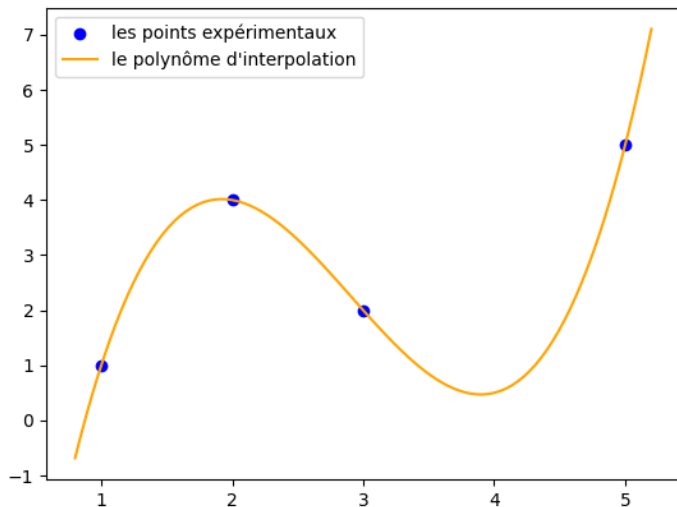
*d'abscisses distinctes deux-à-deux, il existe un unique polynôme  $P(z)$  de degré au plus  $n$ , dont le graphe passe par chacun des points. Ce polynôme est appelé polynôme d'interpolation.*

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	5
$y_i$	1	4	2	5

Le polynôme d'interpolation est

$$P(z) = -\frac{25}{2} + \frac{247}{12}z - 8z^2 + \frac{11}{12}z^3.$$

# Graphiquement



- En algèbre, l'interpolation polynomiale est un non problème
- En algorithmique numérique, les algorithmes prennent des précautions pour éviter des propagations catastrophiques d'erreurs d'arrondis (non à la base des monômes !)
- Dans les applications, on a souvent besoin de propriétés supplémentaires (exemple d'une fonction de survie qui doit être décroissante et comprise entre 0 et 1). Besoin d'interpolation polynomiale mais faite de façon intelligente : les splines.

# En algèbre, c'est un non problème

On attribue à  $P(z)$  des coefficients inconnus

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

On écrit les conditions que doivent vérifier les  $a_i$

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n, \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n, \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n. \end{aligned}$$



# En algèbre, c'est un non problème

On attribue à  $P(z)$  des coefficients inconnus

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

On écrit les conditions que doivent vérifier les  $a_i$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}}_v = \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_b .$$

**Thm** *La matrice de Vandermonde  $A$  est inversible si les  $x_i$  sont distincts deux-à-deux.*

# En algorithmique numérique, c'est moins simple

**Idée** *La méthode par la matrice de Vandermonde cherche à décomposer  $P(z)$  dans la base des monômes. Ce n'est pas une bonne idée.*

Les algorithmes numériques évaluent  $P(z)$  sans calculer ses coefficients :

- La formule de Lagrange (1800)
- L'algorithme de Neville (1900)
- Les différences divisées de Newton (1700)

# L'algorithme de Neville (1900)

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	5
$y_i$	1	4	2	5

$(n = 3)$

**Idée 1** On définit  $P_{i,j}$  comme le polynôme d'interpolation dont le graphe passe par les points d'indices  $i, i-1, \dots, i-j$ .

$i$	$x_i$	$j$			
		0	1	2	3
0	1	1			
1	2	4	$3z - 2$		
2	3	2	$-2z + 8$	$-\frac{5}{2}z^2 + \frac{21}{2}z - 7$	
3	5	5	$\frac{3}{2}z - \frac{5}{2}$	$\frac{7}{6}z^2 - \frac{47}{6}z + 15$	$\frac{11}{12}z^3 - 8z^2 + \frac{247}{12}z - \frac{25}{2}$

# L'algorithme de Neville (1900)

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	5
$y_i$	1	4	2	5

( $n = 3$ )

**Idée 1** On définit  $P_{i,j}$  comme le polynôme d'interpolation dont le graphe passe par les points d'indices  $i, i-1, \dots, i-j$ .

**Idée 2** Il y a une formule pour construire le tableau de polynômes colonne par colonne

$$\begin{aligned} P_{i,0} &= y_i & (0 \leq i \leq n), \\ P_{i,j} &= \frac{(x_i - z) P_{i-1,j-1} + (z - x_{i-j}) P_{i,j-1}}{x_i - x_{i-j}} & (1 \leq j \leq n, \quad j \leq i \leq n). \end{aligned}$$

# L'algorithme de Neville (1900)

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	5
$y_i$	1	4	2	5

( $n = 3$ )

**Idée 1** On définit  $P_{i,j}$  comme le polynôme d'interpolation dont le graphe passe par les points d'indices  $i, i-1, \dots, i-j$ .

**Idée 2** Il y a une formule pour construire le tableau de polynômes colonne par colonne

$$\begin{aligned} P_{i,0} &= y_i & (0 \leq i \leq n), \\ P_{i,j} &= \frac{(x_i - z) P_{i-1,j-1} + (z - x_{i-j}) P_{i,j-1}}{x_i - x_{i-j}} & (1 \leq j \leq n, \quad j \leq i \leq n). \end{aligned}$$

**Idée 3** Si on donne une valeur numérique  $\bar{z}$  à  $z$ , la formule construit un tableau de nombres et on obtient la valeur numérique  $P(\bar{z})$

# Les différences divisées de Newton (1700)

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	5
$y_i$	1	4	2	5

$(n = 3)$

**Rappel** Le tableau  $P$  de l'algorithme de Neville

$i$	$x_i$	$j$			
		0	1	2	3
0	1	1			
1	2	4	$3z - 2$		
2	3	2	$-2z + 8$	$-\frac{5}{2}z^2 + \frac{21}{2}z - 7$	
3	5	5	$\frac{3}{2}z - \frac{5}{2}$	$\frac{7}{6}z^2 - \frac{47}{6}z + 15$	$\frac{11}{12}z^3 - 8z^2 + \frac{247}{12}z - \frac{25}{2}$

# Les différences divisées de Newton (1700)

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	5
$y_i$	1	4	2	5

( $n = 3$ )

**Idée 1** Ne calculer que les coefficients dominants  $c_{i,j}$  des polynômes

$i$	$x_i$	$j$			
		0	1	2	3
0	1	1			
1	2	4	$3z - 2$		
2	3	2	$-2z + 8$	$-\frac{5}{2}z^2 + \frac{21}{2}z - 7$	
3	5	5	$\frac{3}{2}z - \frac{5}{2}$	$\frac{7}{6}z^2 - \frac{47}{6}z + 15$	$\frac{11}{12}z^3 - 8z^2 + \frac{247}{12}z - \frac{25}{2}$

# Les différences divisées de Newton (1700)

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	5
$y_i$	1	4	2	5

$(n = 3)$

**Idée 1** Ne calculer que les coefficients dominants  $c_{i,j}$  des polynômes

$i$	$x_i$	$j$			
		0	1	2	3
0	1	1			
1	2	4	3		
2	3	2	-2	$-\frac{5}{2}$	
3	5	5	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{12}$



# Les différences divisées de Newton (1700)

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	5
$y_i$	1	4	2	5

$(n = 3)$

**Idée 1** Ne calculer que les coefficients dominants  $c_{i,j}$  des polynômes

$$\begin{aligned}c_{i,0} &= y_i & (0 \leq i \leq n), \\c_{i,j} &= \frac{c_{i,j-1} - c_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}} & (1 \leq j \leq n, \quad j \leq i \leq n).\end{aligned}$$

# Les différences divisées de Newton (1700)

$i$	0	1	2	3
$x_i$	1	2	3	5
$y_i$	1	4	2	5

$(n = 3)$

**Idée 1** Ne calculer que les coefficients dominants  $c_{i,j}$  des polynômes

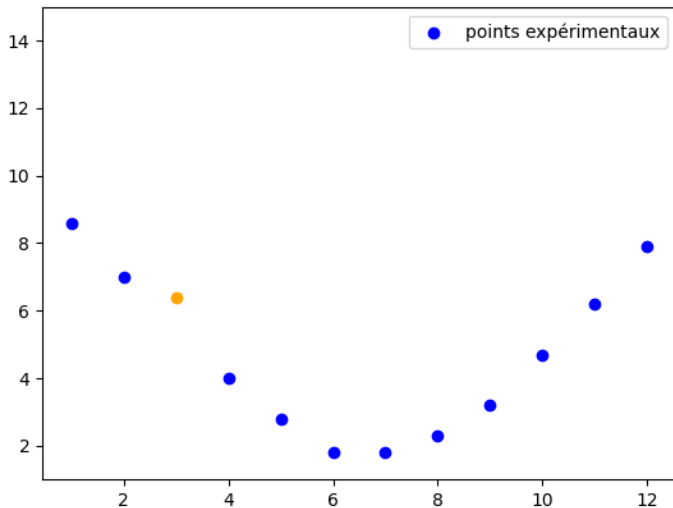
$$\begin{aligned}c_{i,0} &= y_i & (0 \leq i \leq n), \\c_{i,j} &= \frac{c_{i,j-1} - c_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}} & (1 \leq j \leq n, \quad j \leq i \leq n).\end{aligned}$$

**Idée 2** Il existe une formule pour le polynôme d'interpolation

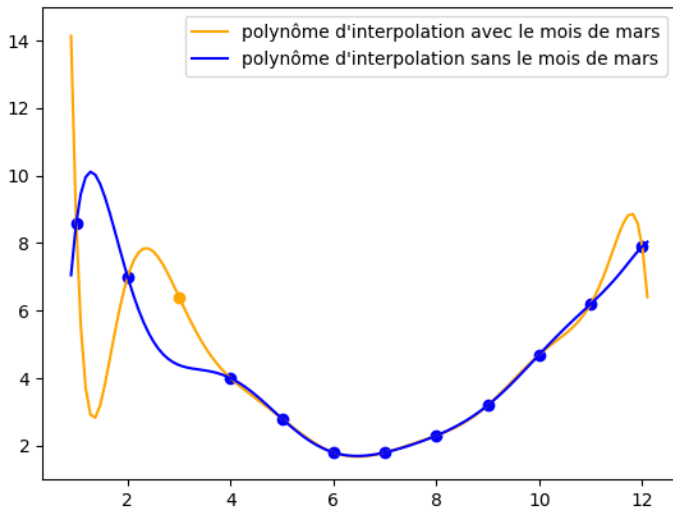
$$\begin{aligned}P_{n,n}(z) &= c_{0,0} + c_{1,1}(z - x_0) + c_{2,2}(z - x_0)(z - x_1) + \cdots + \\&\quad c_{n,n}(z - x_0)(z - x_1) \cdots (z - x_{n-1}).\end{aligned}$$

**Idée 3** Le tableau des  $c_{i,j}$  n'est calculé qu'une fois. Une variante du schéma de Horner-Ruffini permet d'évaluer  $P_{n,n}(z)$

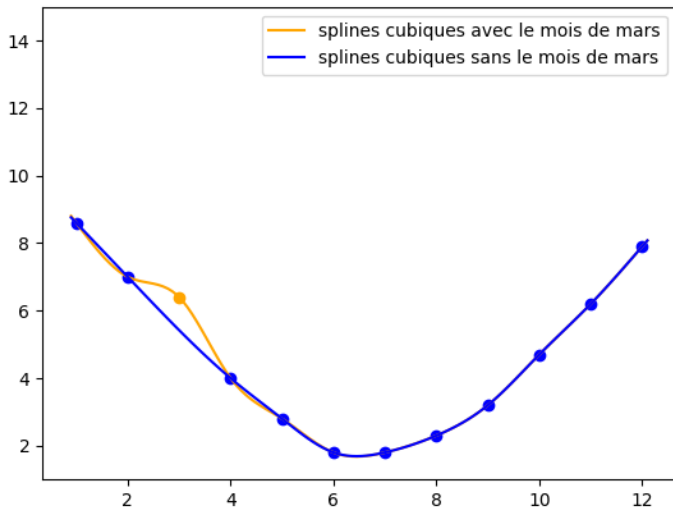
# Les splines



# Les splines



# Les splines



# Les splines lissantes

