Université Paris Diderot – UMR 7586

MÉMOIRE D'HABILITATION

À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

Quelques Aspects p-Adiques des Variétés et Formes Automorphes de Hilbert

présenté par

Mladen Dimitrov

le 3 décembre 2010 devant un jury constitué de

Christophe Breuil	Université Paris-Sud
Denis Benois	Université de Bordeaux
Fred Diamond	King's College London
Michael Harris	Université Paris Diderot
Jan Nekovář	Université Pierre et Marie Curie
Alexeï Pantchichkine	Université Joseph Fourier
Jacques Tilouine	Université Paris-Nord

rapporteurs

Michael Harris	Université Paris Diderot
Alexeï Pantchichkine	Université Joseph Fourier
Dinakar Ramakrishnan	California Institute of Technology

À Delphine et Estelle

Remerciements

Je voudrais remercier les membres de l'équipe de Théorie des Nombres pour le temps qu'ils ont consacré à discuter avec moi des questions abordées dans mes travaux. L'atmosphère propice à la recherche dans notre département m'a également été très bénéfique. Je remercie aussi mes collaborateurs d'autres universités pour les échanges d'idées que nous avons eus.

Les conditions de travail au sein de l'IMJ et de l'URF de Mathématiques sont tout à fait exceptionnelles et j'en remercie la direction et les personnels administratifs respectifs. Par ailleurs, le CRCT accordé par mon université m'a permis de rédiger ce mémoire en toute sérénité.

Depuis ma nomination en tant que maître de conférences à l'Université Paris Diderot – Paris 7 en 2004, j'ai pu bénéficier d'une grande mobilité qui a énormément profité à mes recherches. J'ai pu notamment effectuer un séjour de recherche de deux mois à UCLA, puis occuper un poste à Caltech en 2005–2006 où l'influence de mathématiciens tels que H. Hida, M. Flach et D. Ramakrishnan a été déterminante dans l'évolution de ma thématique de recherche. J'ai également passé un mois en Inde au Tata Institute en 2008, ainsi que quatre mois au CRM à Barcelone en 2010, grâce à une délégation de six mois au CNRS auquel je suis particulièrement reconnaissant.

Je voudrais maintenant exprimer ma gratitude aux rapporteurs et membres du jury : à Denis Benois pour l'intérêt constant qu'il porte à mes recherches sur les fonctions L p-adiques depuis 2008 ; à Christophe Breuil pour sa confiance et pour son invitation à l'IHES de janvier à juillet 2009, séjour pendant lequel il m'a montré les liens étroits entre mon domaine de recherche et le programme de Langlands p-adique ; à Fred Diamond, dont les travaux sur la modularité ont été une source d'inspiration pour moi ; à Michael Harris pour avoir accueilli sans hésitation l'idée de présenter mes travaux d'habilitation ; à Jan Nekovář pour toutes les conversations stimulantes que nous avons eues ; à Alexeï Pantchichkine et à Dinakar Ramakrishnan de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être mes rapporteurs ; enfin à Jacques Tilouine qui, après avoir dirigé ma thèse, est toujours resté pour moi un interlocuteur privilégié à qui j'ai pu confier mes projets de recherche.

Enfin, j'aurais mis beaucoup plus de temps à finir ces travaux si je n'avais pas eu le soutien sans faille de mon épouse. Je lui dois beaucoup, ainsi qu'à nos parents et à notre fille qui égaie nos jours.

Table des matières

1 Introduction

Le but de ce mémoire est de décrire les résultats principaux des travaux [1], [2], [3], [4] et [5] présentés en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches (HDR). On ne mentionnera que très brièvement les articles [6], [7], [8] et [9] qui sont issus de la thèse [10].

Les objets principaux de notre recherche sont le groupe de Galois absolu d'un corps de nombres totalement réel et ses représentations continues irréductibles de dimension deux sur des corps finis, p-adiques ou Λ-adiques. On s'intéresse également aux valeurs spéciales de fonctions L classiques et p-adiques de formes modulaires, aux groupes de classes ou de Selmer et à leurs liens exprimés en termes de conjectures de Bloch-Kato ou de conjectures principales d'Iwasawa. Les outils principaux dans notre approche sont les représentations automorphes de GL_2 et la cohomologie des variétés modulaires de Hilbert.

Dans [5] l'on adapte la méthode de Taylor et Wiles aux cas des variétés modulaires de Hilbert pour établir des théorèmes de modularité (voir la partie 2) ainsi qu'une formule pour la valeur en 1 de la fonction L adjointe d'une forme modulaire de Hilbert (voir la partie 3). On y établit également des résultats de non-torsion pour la cohomologie des variétés modulaires de Hilbert, plus généraux que ceux obtenus dans les travaux issus de la thèse (voir la partie 4).

Ces dix dernières années ont vu naître le programme de Langlands p-adique de Breuil et Colmez. Encore en grande partie conjectural pour un groupe algébrique réductif sur un corps de nombres, ce programme a déjà porté ses fruits pour GL_2 sur $\mathbb{Q}$ grâce aux travaux de Breuil, Colmez, Emerton et Kisin culminant avec la preuve de beaucoup de cas de la conjecture de Fontaine et Mazur pour GL_2 sur $\mathbb{Q}$ (voir [E2] et [K]). Parmi les objets centraux de ce programme se trouvent la cohomologie complétée et une certaine suite spectrale introduites par Emerton [E1]. Dans le cas de GL_2 sur un corps de nombres totalement réel, les résultats de [1] sur la cohomologie ordinaire des variétés modulaires de Hilbert impliquent la dégénérescence de la partie ordinaire de cette suite spectrale (voir la partie 6).

Les symboles modulaires classiques, introduits par Manin dans les années 70, ont de nombreuses applications telles que la rationalité des valeurs spéciales de fonctions L de formes modulaires, le théorème de Merel [Me] sur la borne uniforme de la torsion des courbes elliptiques et l'algorithme de calcul numérique de systèmes de valeurs propres de formes modulaires. Les symboles modulaires jouent aussi un rôle central dans la construction et l'étude des fonctions L p-adiques de formes modulaires classiques d'après les travaux de Mazur, Manin, Vishik, Amice-Velu *et al.* (voir [MTT] pour une description très complète de leurs résultats).

L'article [1] introduit une nouvelle série de recherches portant sur les symboles modulaires pour les variétés modulaires de Hilbert et sur les fonctions L p-adiques pour les formes modulaires de Hilbert seules et en familles. À part le travail précurseur de Manin [Mn] sur ce sujet, les articles plus récents de Dabrowski [Da], Pantchichkine [Pa] et Mok [Mo] utilisent la méthode de Rankin-Selberg. Nous donnons une nouvelle construction des fonctions L p-adiques pour les formes modulaires de Hilbert, à l'aide d'une généralisation des symboles modulaires que nous appelons des symboles automorphes (voir la partie 5). Notre construction permet aussi d'associer des fonctions L p-adiques aux familles ordinaires de formes modulaires de Hilbert dans des anneaux de déformation universels de représentations galoisiennes (voir la partie 7).

La théorie des formes modulaires Λ-adiques, appelées aussi familles de Hida, a été développée dans [H1] et [H2], où ont été établies plusieurs de leur propriétés fondamentales. Durant ce dernier quart de siècle, la théorie de Hida a été généralisée à d'autres groupes réductifs que GL_2 et a joué un rôle central dans l'étude des propriétés arithmétiques des formes automorphes. Elle a motivé de nombreuses recherches dans des domaines variés allant des congruences entre formes modulaires à la théorie de déformations de représentations galoisiennes de Mazur, et des valeurs de fonctions L (classiques et p-adiques) aux groupes (et complexes) de Selmer. Le travail [2] étudie les propriétés p-adiques des formes modulaires classiques de poids un, du point de vue de la théorie de Hida. Par contraste avec [1], le point de vue adopté est très concret et l'on y trouve aussi beaucoup d'exemples numériques, dont l'obtention a nécessité un travail approfondi avec les logiciels `Pari` et `Magma`.

Finalement, le travail [3] est une "excursion" dans la théorie des représentations de groupes p-adiques.

Nous avons essayé d'utiliser partout le langage des adèles et des formes automorphes. Bien que nous n'ayons pas de réticences à utiliser le langage modulaire classique en tant que tel, nous avons jugé que le changement de langage au sein d'un article le rend souvent difficile à lire. Comme pour certains aspects de la théorie (twists locaux, théorèmes de modularité, formes quasi-ordinaires) le langage adélique semblait indispensable, nous avons été amenés à définir adéliquement des notions qui existaient auparavant uniquement en langage classique (symboles modulaires, périodes, isomorphismes d'Eichler-Shimura).

Au fil de ce mémoire, nous allons mentionner des idées et des pistes que nous comptons explorer dans le futur, et dont certaines, nous l'espérons, pourront donner lieu à des sujets de thèse.

2 Théorèmes de modularité pour GL_2 / F

Soit F un corps de nombres totalement réel, d'anneau des entiers $\mathfrak{o}$, d'anneau des adèles $\mathbb{A}$ et soit p un nombre premier. On note Gal_L le groupe de Galois absolu d'un corps L.

La modularité pour GL_1 / F concernant les représentations continues de dimension un de Gal_F est l'objet principal de la théorie de corps de classes globale. Dans la formulation donnée par Weil, l'abélianisé de Gal_F est décrit comme le quotient du groupe de classes d'idèles $\mathbb{A}^\times / F^\times$ par la composante connexe $\overline{(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})_+^\times}$ de l'identité. Ainsi les caractères continus $\mathrm{Gal}_F \to \mathbb{C}^\times$ correspondent à des caractères de Hecke d'ordre fini. Enfin, si l'on suppose la conjecture de Leopoldt vraie pour F en p, tout caractère p-adique $\mathrm{Gal}_F \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ s'écrit comme produit d'un caractère d'ordre fini par une puissance p-adique du caractère cyclotomique $\chi_p : \mathrm{Gal}_F \to \mathbb{Z}_p^\times$.

Le cas suivant porte sur la modularité pour GL_2 / F. À toute représentation automorphe cuspidale π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ engendrée par une forme modulaire de Hilbert holomorphe nouvelle de poids arithmétique et à tout plongement $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, l'on sait associer par Taylor [Ta] *et al.* une représentation p-adique

$$\rho_{\pi,p} : \mathrm{Gal}_F \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_p) \tag{1}$$

qui est irréductible, totalement impaire, non-ramifiée en dehors d'un ensemble fini de places et potentiellement semi-stable en toutes les places v divisant p (voir [S] et [L]). Réciproquement, Fontaine-Mazur [FM] et Langlands ont conjecturé que toute représentation p-adique de dimension deux ayant ces propriétés provient d'une représentation automorphe π comme ci-dessus.

Soit I l'ensemble des plongements de F dans $\mathbb{R}$. Le groupe de caractères algébriques du tore $F^\times$ peut être identifié avec $\mathbb{Z}[I]$ comme suit : pour tout $k = \sum_{\tau \in I} k_\tau \tau \in \mathbb{Z}[I]$ et pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre A qui déploye $F^\times$, l'on considère le caractère $x \in (F \otimes_{\mathbb{Q}} A)^\times \mapsto x^k = \prod_{\tau \in I} \tau(x)^{k_\tau} \in A^\times$. Le caractère norme $\mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}} : F^\times \to \mathbb{Q}^\times$ correspond alors à $t = \sum_{\tau \in I} \tau \in \mathbb{Z}[I]$.

Définition 2.1 *Un poids $(k, w_0) \in \mathbb{Z}[I] \times \mathbb{Z}$ est dit cohomologique si pour tout $\tau \in I$, $k_\tau \geq 2$ et $k_\tau \equiv w_0 \pmod 2$.*

La conjecture de Fontaine-Mazur se décompose naturellement en deux parties. La première est la conjecture de modularité de Buzzard-Diamond-Jarvis (voir [BDJ]) qui généralise la conjecture de modularité de Serre (maintenant théorème de Khare et Wintenberger) aux corps totalement réels en affirmant que toute représentation irréductible et totalement impaire de Gal_F en dimension deux sur un corps fini provient d'une représentation automorphe cuspidale π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$. Nos résultats portent sur la deuxième partie concernant la modularité des déformations d'une représentation galoisienne modulaire mod p.

Pour la suite, on se donne un ensemble fini Σ de places de F ne divisant pas p et une représentation continue irréductible

$$\bar{\rho} : \mathrm{Gal}_{F,\Sigma p} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p), \tag{2}$$

définie sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ d'une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$, où $\mathrm{Gal}_{F,\Sigma p}$ désigne le groupe de Galois de l'extension algébrique maximale de F non-ramifiée en dehors de Σ et des places divisant $p\infty$. Considérons les hypothèses :

Hypothèse 1 *Aucune tordue de $\bar{\rho}$ par un caractère ne s'étend à $\mathrm{Gal}_{F'}$ pour aucun sous-corps strict F' de F et l'image de $\bar{\rho}$ contient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$.*

Hypothèse 2 *Le premier p est non-ramifié dans F et $\bar{\rho} \simeq \rho_{\bar{\pi},p} \mod p$ avec $\bar{\pi}$ représentation automorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ de conducteur premier à p et de poids cohomologique $(\bar{k}, \bar{w}_0)$ tel que $\bar{w}_0 t \geq \bar{k}$ et $p - 1 > \sum_{\tau \in I} \frac{\bar{k}_\tau + \bar{w}_0}{2}$.*

Notons qu'étant donnée une représentation automorphe cuspidale π qui ne provient pas par changement de base d'un sous-corps strict F' de F, ni par induction automorphe d'un caractère de Hecke d'une extension quadratique CM de F, alors pour presque tout nombre premier p la réduction modulo p de $\rho_{\pi,p}$ satisfait l'hypothèse 1.

Théorème 2.2 *[5, Théorème A] Soit une représentation continue*

$$\bar{\rho} : \mathrm{Gal}_{F,\Sigma p} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

vérifiant les hypothèses 1 et 2. Alors toute déformation p-adique de $\bar{\rho}$ qui est cristalline aux places divisant p de poids appartenant à un intervalle de longueur au plus $p - 2$ provient d'une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$.

Un point de vue porteur dans l'étude de la modularité de représentations galoisiennes est celui de la théorie des déformations de Mazur [Mz]. D'après un résultat de Mazur, il existe un anneau universel de déformation $\mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}$ qui est la $\mathcal{O}$-algèbre classifiant les déformations de $\bar{\rho}$ de déterminant fixé qui sont minimalement ramifiées en déhors de Σ et cristallines de poids entre 0 et $p - 2$ aux places divisant p.

Il semble alors naturel de chercher à construire un anneau universel modulaire $\mathcal{T}_{\bar{\rho},\Sigma}$ paramétrant les déformations de $\bar{\rho}$ qui sont modulaires. La réponse est cachée dans l'action des algèbres de Hecke sur la cohomologie de certaines variétés de Shimura. Nous nous intéressons tout particulièrement aux variétés modulaires de Hilbert qui sont des variétés de Shimura pour le groupe GL_2 /F, bien que pour certaines applications l'on puisse utiliser des variétés de Shimura associées à d'autres algèbres de quaternions. La coholomogie des variétés modulaires de Hilbert est la clef de voûte de la plupart de nos projets de recherche passés et en cours, et sera rappelée dans la partie 4.1.

La méthode de Taylor-Wiles, que nous avons mise en œuvre dans le cas des variétés modulaires de Hilbert, permet de démontrer un résultat beaucoup plus précis que le théorème 2.2, à savoir que $\mathcal{R}_{\bar\rho,\Sigma} \simeq \mathcal{T}_{\bar\rho,\Sigma}$, où $\mathcal{T}_{\bar\rho,\Sigma}$ est l'algèbre de Hecke engendrée par presque tous les opérateurs de Hecke agissant sur un morceau $\mathcal{M}_{\bar\rho,\Sigma}$ de la cohomologie en degré d d'une certaine variété modulaire de Hilbert $Y_{\bar\rho,\Sigma}$ (voir [5, Théorème 6.6]). En effet, pour démontrer le théorème 2.2 il aurait suffi que $\mathcal{R}_{\bar\rho,\Sigma} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p \simeq \mathcal{T}_{\bar\rho,\Sigma} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{\mathbb{Q}}_p$ et d'autres techniques, comme celles développées par Kisin [K], permettent d'y arriver plus facilement, sans établir par exemple d'analogues du lemme d'Ihara. Néanmoins, pour d'autres applications que nous avons en vue, comme celles décrites dans les parties 3 et 7, il est important de disposer de l'isomorphisme $\mathcal{R}_{\bar\rho,\Sigma} \simeq \mathcal{T}_{\bar\rho,\Sigma}$ et de la liberté de $\mathcal{M}_{\bar\rho,\Sigma}$ sur $\mathcal{T}_{\bar\rho,\Sigma}$ qui se démontre en même temps.

Le caractère central de π correspond par la théorie du corps de classes globale à $\det(\rho_{\pi,p})\chi_p$. De plus, la correspondance $\pi \mapsto \rho_{\pi,p}$ est compatible avec toutes les correspondances de Langlands locales (voir [C] pour les places ne divisant pas p et [L] pour les places divisant p). En particulier, pour tout v divisant p, $\rho_{\pi,p}|_{G_{F_v}}$ est réductible si, et seulement si, π_v est quasi-ordinaire (voir [H4], [W1] et [S]). On dit alors que $\rho_{\pi,p}$ est quasi-ordinaire. Si de plus pour tout v divisant p, $\rho_{\pi,p}|_{G_{F_v}}$ possède une droite quotient non-ramifiée, alors on dit que $\rho_{\pi,p}$ et π sont ordinaires.

Supposons jusqu'à la fin de cette partie que $\bar\rho$ est quasi-ordinaire. Par la théorie de Mazur, il existe alors un anneau de déformations universel $\mathcal{R}^{\mathrm{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma}$ paramétrant les déformations quasi-ordinaires de $\bar\rho$. Il est muni d'une structure naturelle de $\Lambda^{\mathrm{q.o.}}$-algèbre, où $\Lambda^{\mathrm{q.o.}}$ est l'algèbre d'Iwasawa définie dans la partie 6.1. Suivant Fujiwara [Fu] l'on peut définir l'algèbre de Hecke quasi-ordinaire universelle $\mathcal{T}^{\mathrm{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma}$ comme la $\Lambda^{\mathrm{q.o.}}$-algèbre de Hecke maximale telle que tout homomorphisme $\mathcal{T}^{\mathrm{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ dont la restriction à $\Lambda^{\mathrm{q.o.}}$ est algébrique de poids (k, w_0) (voir la définition 6.2) provient d'une représentation automorphe cuspidale π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ de poids (k, w_0), quasi-ordinaire en p et telle que $\rho_{\pi,p} \mod p \simeq \bar\rho$.

De même, si $\bar\rho$ est ordinaire, il existe un anneau de déformations universel ordinaire $\mathcal{R}^{\mathrm{ord}}_{\bar\rho,\Sigma}$ et une algèbre de Hecke ordinaire $\mathcal{T}^{\mathrm{ord}}_{\bar\rho,\Sigma}$ qui sont des Λ^{ord}-algèbres.

Théorème 2.3 *Si $\bar\rho$ satisfait les hypothèses 1 et 2 avec $\bar\pi$ quasi-ordinaire de poids $\bar k > 2t$, alors il existe un isomorphisme naturel $\mathcal{R}^{\mathrm{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}^{\mathrm{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma}$ d'algèbres finies et plates d'intersection complète sur $\Lambda^{\mathrm{q.o.}}$. Si de plus $\bar\pi$ est ordinaire, alors on a un isomorphisme $\mathcal{R}^{\mathrm{ord}}_{\bar\rho,\Sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}^{\mathrm{ord}}_{\bar\rho,\Sigma}$ d'algèbres finies et plates d'intersection complète sur Λ^{ord}.*

La démonstration repose sur la réalisation de $\mathcal{T}^{\mathrm{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma}$ comme algèbre de Hecke agissant sur la cohomologie quasi-ordinaire d'une tour de variétés modulaires de Hilbert (voir la partie 6.2). On procède alors par “spécialisation” en un idéal premier de hauteur un bien choisi de $\Lambda^{\mathrm{q.o.}}$ en se ramenant au theorème 2.2.

Corollaire 2.4 *Soit une représentation continue $\bar\rho : \mathrm{Gal}_{F,\Sigma p} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$, vérifiant les hypothèses 1 et 2 avec $\bar\pi$ (quasi-)ordinaire de poids $\bar k > 2t$. Alors toute déformation (quasi-)ordinaire de $\bar\rho$ provient d'une représentation automorphe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$.*

3 Fonction L adjointe d'une forme de Hilbert

À toute représentation automorphe holomorphe cuspidale π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ de poids cohomologique (k, w_0), Blasius et Rogawski [BR] associent un motif A_π sur F de rang 3 à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, pur de poids 0 et autodual. Pour tout $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ sa réalisation p-adique $\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,p})$ est donnée par l'action adjointe de Gal_F via $\rho_{\pi,p}$ sur les matrices 2×2 de trace nulle. Soit $\mathrm{L}(A_\pi, s)$ la fonction L correspondante. Le facteur Γ associé s'écrit :

$$\Gamma(A_\pi, s) = \prod_{\tau \in I} \pi^{-(s+1)/2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) (2\pi)^{-(s+k_\tau-1)} \Gamma(s + k_\tau - 1).$$

Les valeurs critiques au sens de Deligne [De] sont $s = 0$ et $s = 1$. La conjecture de Beilinson et Deligne en $s = 1$ s'énonce :

$$\mathrm{ord}_{s=1} \mathrm{L}(A_\pi, s) = h^1_{\mathrm{f}}(F, \mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) - h^0_{\mathrm{f}}(F, \mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p). \quad (3)$$

Par une formule de Shimura, $\mathrm{L}(A_\pi, 1)$ est proportionnel à la norme, pour le produit scalaire de Peterson, de la forme automorphe nouvelle associée à π et est donc non-nul. Puisque $\rho_{\pi,p}$ est irréductible, le lemme de Schur implique que $h^0_{\mathrm{f}}(F, \mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = 0$. La conjecture de Beilinson et Deligne équivaut donc à $h^1_{\mathrm{f}}(F, \mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = 0$.

Théorème 3.1 *[5, Théorème B(i)] Si $\rho_{\pi,p} \mod p$ satisfait les hypothèses 1 et 2 avec $\bar{\pi} = \pi$, alors la conjecture de Beilinson et Deligne est vraie pour le motif $A_\pi(1)$, c'est-à-dire : $\mathrm{H}^1_{\mathrm{f}}(F, \mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) = 0$.*

Concernant la valeur de $\mathrm{L}(A_\pi, 1)$ nous disposons de la conjecture de Deligne [De] la prédisant à un nombre algébrique non-nul près, et de la conjecture de Bloch et Kato [BK] sur les nombres de Tamagawa la prédisant à une unité p-adique près, pour tout p, en fonction de certains invariants arithmétiques liés au motif A_π, dont le plus intéressant et en même temps le plus mystérieux est le groupe de Tate-Shafarevich $\mathrm{H}^1_{\mathrm{f}}(F, \mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ (voir [DFG, §2.4]). Notre résultat est le suivant :

Théorème 3.2 *[7, Théorème B(ii)] Si $\rho_{\pi,p} \mod p$ satisfait les hypothèses 1 et 2 avec $\bar{\pi} = \pi$, alors pour tout $\epsilon \in \{\pm 1\}^I$, pour tout ensemble fini de places Σ contenant les places de ramification de π et pour tout plongement $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$:*

$$\iota_p\left(\frac{\Gamma(A_\pi, 1)\, \mathrm{L}(A_\pi, 1)}{\Omega^\Sigma_{\pi,\epsilon} \Omega^\Sigma_{\pi,-\epsilon}}\right) \mathcal{O} = \mathrm{Tam}(\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,p}))\, \mathrm{Fitt}_{\mathcal{O}}\left(\mathrm{H}^1_{\mathrm{f}}(F, \mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,p}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)\right),$$

où $\mathrm{Tam}(\mathrm{ad}^0(\rho_{\pi,p})) \subset \mathcal{O}$ désigne l'idéal de Tamagawa au sens de Fontaine et Perrin-Riou [FP-R] et $\Omega^\Sigma_{\pi,\epsilon}$ sont les périodes canoniques venant de l'isomorphisme de Matsushima-Shimura-Harder (associées à la Σ-stabilisation de la forme nouvelle de π).

4 Cohomologie des variétés modulaires de Hilbert

Cette section résume les résultats de [5] portant sur la cohomologie des variétés modulaires de Hilbert à coefficients dans $\mathcal{O}$.

4.1 Variétés modulaires de Hilbert

Soit K un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_2(F\otimes\widehat{\mathbb{Z}})$. Posons $F_\infty = F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, $K_\infty^+ = \mathrm{SO}_2(F_\infty)F_\infty^\times$ et notons par F_∞^+ la composante connexe de 1 dans $F_\infty^\times$. Les points complexes de la variété modulaire de Hilbert analytique Y_K sont donnés par le double quotient :

$$\mathrm{GL}_2(F)\backslash\,\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})/KK_\infty^+.$$

C'est une variété quasi-projective de dimension $d = [F : \mathbb{Q}]$, lisse si K est suffisamment petit. Notons par $\overline{Y}_K$ la compactification minimale de Y_K, obtenue en ajoutant un nombre fini de points fermés (les pointes). Cette compactification n'est jamais lisse si $d > 1$, à cause des unités de F. Y_K admet des compactifications toroïdales lisses à l'infini, c'est-à-dire lisses lorsque Y_K est lisse, dépendant de certaines décompositions de F_∞^+ en cônes polyédraux rationnels. La géométrie des variétés modulaires de Hilbert en tant que variétés analytiques et en tant que variétés arithmétiques, est l'objet de [8] et [9].

Dans la suite de cette partie, on suppose que K se décompose en produit $\prod_v K_v$ sur les places finies de v, que $K_p = \prod_{v|p} K_v$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}\otimes\mathbb{Z}_p)$ et que Y_K est lisse.

Pour tout sous-groupe distingué K' de K d'indice fini, le morphisme naturel $Y_{K'} \to Y_K$ est fini étale de groupe $K/K'(K\cap F^\times)$. Il est important d'observer qu'alors que le groupe K/K' agit naturellement sur $Y_{K'}$, seul $K/K'(K\cap F^\times)$ agit fidèlement. C'est l'un des endroits où apparaît clairement la différence entre action locale et action globale (si F n'est pas $\mathbb{Q}$). La contrepartie galoisienne de ce phénomène est qu'il n'existe pas toujours un caractère de Hecke algébrique (global) à ramification prescrite en toute place finie.

Dans la suite l'on fixe un poids cohomologique (k, w_0) et l'on considère le système local $\mathcal{L}_K(k, w_0; \mathcal{O})$ sur Y_K correspondant à la représentation algébrique irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})^I$ suivante

$$\bigotimes_{\tau\in I}\left(\mathrm{Sym}_\tau^{k_\tau-2}\otimes\mathrm{Det}_\tau^{\frac{1}{2}(w_0-k_\tau)+1}\right)(\mathcal{O}^2).$$

Il est sous-entendu que K agit par sa p-composante K_p que l'on identifie d'abord avec un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O})$ puis avec un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})^I$.

Les objets principaux dans cette partie sont les groupes de cohomologie singulière $\mathrm{H}^i(Y_K, \mathcal{L}_K(k, w_0; \mathcal{O}))$ et ceux à support compact $\mathrm{H}^i_c(Y_K, \mathcal{L}_K(k, w_0; \mathcal{O}))$.

En toute place v telle que $K_v \simeq \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v)$ l'on considère le morphisme $S_v : Y_K \to Y_K$ venant de l'action de $\left(\begin{smallmatrix} \varpi_v & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{smallmatrix}\right)$, ainsi que la correspondance T_v sur Y_K provenant des morphismes $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : Y_{K \cap K_0(v)} \to Y_K$ définis respectivement à l'aide des deux inclusions

$$K_0(v) \subset \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v) \text{ et } K_0(v) \subset \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{smallmatrix}\right) \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_v) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_v \end{smallmatrix}\right)^{-1}.$$

Les correspondances T_v et S_v agissent naturellement sur $\mathrm{H}^i(Y_K, \mathcal{L}_K(k, w_0; \mathcal{O}))$ ainsi que sur $\mathrm{H}^i_c(Y_K, \mathcal{L}_K(k, w_0; \mathcal{O}))$.

4.2 Absence de torsion et lemme d'Ihara

Pour Σ et $\bar\rho$, comme dans la partie 2, l'on considère l'idéal maximal

$$\mathfrak{m}_{\bar\rho} = (\varpi, T_v - \mathrm{tr}(\bar\rho(\mathrm{Frob}_v)), S_v - \det(\bar\rho(\mathrm{Frob}_v))\, \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(v)^{-1})$$

de l'algèbre de Hecke abstraite $\mathbb{T}^\Sigma = \mathcal{O}[T_v, S_v| \ v \notin \Sigma, v \nmid p]$, où ϖ désigne une uniformisante de $\mathcal{O}$. Notons par $\mathrm{H}^i(Y_K, \mathcal{L}_K(\bar k, \bar w_0; \mathcal{O}))_{\bar\rho}$ la localisation en $\mathfrak{m}_{\bar\rho}$.

Le théorème suivant ouvre la voie pour la construction de systèmes de Taylor-Wiles en utilisant la cohomologie des variétés modulaires de Hilbert.

Théorème 4.1 *([5]) Supposons que $\bar\rho$ satisfait les hypothèses 1 et 2. Alors*

(i) $\mathrm{H}^i(Y_K, \mathcal{L}_K(\bar k, \bar w_0; \mathcal{O}))_{\bar\rho}$ *est un $\mathcal{O}$-module libre qui est nul si $i \neq d$.*

(ii) La dualité de Poincaré induit un accouplement parfait

$$\mathrm{H}^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\bar k, \bar w_0; \mathcal{O}))_{\bar\rho} \times \mathrm{H}^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\bar k, \bar w_0; \mathcal{O}))_{\bar\rho} \to \mathcal{O}\,.$$

(iii) Si $\Delta = K/K'(K \cap F^\times)$ est un p-groupe, alors $\mathrm{H}^d(Y_{K'}, \mathcal{L}_{K'}(\bar k, \bar w_0; \mathcal{O}))_{\bar\rho}$ est un $\mathcal{O}[\Delta]$-module libre, dont les Δ-coinvariants sont isomorphes à $\mathrm{H}^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\bar k, \bar w_0; \mathcal{O}))_{\bar\rho}$.

Le théorème suivant généralise aux variétés modulaires de Hilbert un résultat classique, dû à Ihara, portant sur les jacobiennes de courbes modulaires.

Théorème 4.2 *([5]) Soit v une place de F telle que K_v est maximal. Si $\bar\rho$ satisfait les hypothèses 1 et 2, alors l'homomorphisme de $\mathcal{O}$-modules :*

$$\mathrm{pr}_1^* + \mathrm{pr}_2^* : \mathrm{H}^d(Y_K, \mathcal{L}_K(\bar k, \bar w_0; \mathcal{O}))_{\bar\rho}^{\oplus 2} \to \mathrm{H}^d(Y_{K \cap K_0(v)}, \mathcal{L}_{K \cap K_0(v)}(\bar k, \bar w_0; \mathcal{O}))_{\bar\rho}$$

est injectif à conoyau plat.

5 Symboles automorphes et valeurs de fonctions L

Rappelons que classiquement Y_K est une union finie de quotients de $F_\infty + iF_\infty^+$ par des sous-groupes de congruences de $\mathrm{GL}_2(F)$. La clôture de l'image du cône standard de Shintani $F_\infty^+/\,\mathfrak{o}_+^\times$ dans $\overline{Y}_K$ définit un d-cycle donc un élément de $\mathrm{H}_d(\overline{Y}_K, \mathbb{Z})$ que nous appelons le symbole modulaire de Manin-Oda. Dans le cas des surfaces modulaires de Hilbert, il a été étudié par Oda [O] et généralise le symbole modulaire elliptique venant de la géodésique sur la courbe modulaire reliant les pointes 0 et ∞.

Dans l'esprit de la thèse de Tate, on introduit dans [1] un analogue adélique du symbole de Manin et Oda, appelé symbole automorphe.

Comme application nous donnons une nouvelle construction des fonctions L p-adiques pour les formes modulaires de Hilbert. Nous prenons soin de rédiger cette nouvelle construction dans une assez grande généralité, notamment pour inclure l'aspect horizontal, le cas quasi-ordinaire et les poids non-parallèles (voir théorème 5.1). Un autre avantage de cette construction est sa flexibilité permettant de construire des fonctions L p-adiques Σ-stabilisées (voir théorème 5.2), ces dernières présentant l'avantage de vivre en famille (voir la partie 7).

La non-trivialité des symboles automorphes sera le corollaire de leurs propriétés d'interpolation de valeurs spéciales de fonctions L de formes modulaires de Hilbert, en vue du théorème de non-annulation de fonctions L de Rohrlich.

Les relations entre les symboles de Manin-Oda restent mystérieuses, même dans le cas d'une surface de Hilbert, car il s'agit alors d'étudier le H^2 d'un groupe arithmétique (les symboles modulaires classiques et leurs généralisations par Cremona, aux formes modulaires sur un corps quadratique imaginaire, et par Voight, aux courbes de Shimura, concernent tous le H^1 d'un groupe arithmétique). Une première étape à franchir, faisant partie d'un projet en collaboration avec P. Charollois, est celle de la rationalité de certaines 2-chaînes dont les bords sont des unions de géodésiques reliant deux pointes (toute la difficulté résidant dans la non-unicité de ces dernières).

5.1 Symboles automorphes

Fixons un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{o}$ et notons par $U(\mathfrak{a})$ le sous-groupe compact ouvert des éléments de $(\mathfrak{o}\otimes\widehat{\mathbb{Z}})^\times$ congrus à 1 modulo $\mathfrak{a}$. Soit $K \subset \mathrm{GL}_2(F \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$ un sous-groupe compact ouvert contenant $\begin{pmatrix} U(\mathfrak{a}) & \mathfrak{o}\otimes\widehat{\mathbb{Z}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour chaque place finie v choisissons une uniformisante ϖ_v de F_v et notons a_v la valuation de $\mathfrak{a}$ en v. On appelle cycle automorphe l'application continue suivante :

$$C_K(\mathfrak{a}) : \mathbb{A}^\times/F^\times U(\mathfrak{a}) \longrightarrow Y_K \ , \ y \mapsto \mathrm{GL}_2(F) \begin{pmatrix} y & (y_v \varpi_v^{-a_v})_{v|\,\mathfrak{a}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K K_\infty^+. \qquad (4)$$

Soit $E(\mathfrak{a})$ le groupe des unités totalement positives de $\mathfrak{o}$ qui sont congrues à 1 modulo $\mathfrak{a}$, et soit $\mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{a})$ le groupe de classes de rayon strict $\mathbb{A}^\times/F^\times U(\mathfrak{a}) F_\infty^+$.

Pour $\eta \in \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{a})$, on note $C_K(\eta)$ la restriction de $C_K(\mathfrak{a})$ à l'image inverse $\widetilde{\eta}$ de η en utilisant la suite exacte courte :

$$1 \to F_\infty^+/E(\mathfrak{a}) \to \mathbb{A}^\times/F^\times U(\mathfrak{a}) \to \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{a}) \to 1. \tag{5}$$

On démontre sans difficulté que $C_K(\eta)$ s'étend uniquement en une application continue et propre $\overline{C_K(\eta)} : \overline{\eta} \to \overline{Y}_K$, où $\overline{\eta}$ est la compactification de $\widetilde{\eta}$ obtenue en y ajoutant deux points, ceci nous permettant de définir le *symbole automorphe* $S_K(\eta) \in \mathrm{H}_d(\overline{Y}_K)$ comme l'image de $1 \in \mathrm{H}_d(\overline{\eta}) = \mathbb{Z}$ par $\overline{C_K(\eta)}$.

L'approche adélique permet de construire des symboles automorphes p-adique à valeurs dans des groupes de classes. Pour tout $\alpha \geq 1$ tel que $K_p \supset K_{11}(p^\alpha)$ et tout $\beta \geq \alpha$ on pose :

$$S_{K,\beta} = \sum_{\eta \in \mathrm{Cl}_F^+(p^\beta)} S_K(\eta)[\eta] \in \mathrm{H}_d(\overline{Y}_K, \mathcal{O})[\mathrm{Cl}_F^+(p^\beta)]. \tag{6}$$

On voit ici l'un des avantages de l'approche adélique qui fournit un symbole sur $\mathrm{Cl}_F^+(p^\beta)$, par rapport à l'approche classique qui aurait donné $\mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{o})$ familles de symboles chacun sur $(\mathfrak{o}/p^\beta)^\times/E(\mathfrak{o})$.

On démontre alors la propriété de distribution suivante : l'image de $S_{K,\beta+1}$ par la projection naturelle $\mathrm{Cl}_F^+(p^{\beta+1}) \to \mathrm{Cl}_F^+(p^\beta)$ est égale à $U_p \cdot S_{K,\beta}$.

Notons que lorsque $F = \mathbb{Q}$, l'image par U_p du symbole modulaire de $x \in \mathbb{Q}$ à ∞ est la somme de p symboles modulaires de $\frac{x+b}{p}$ à ∞ ($b = 0, ..., p-1$). La situation est assez différente pour $F \neq \mathbb{Q}$. Par exemple pour $d = 2$ et β assez grand, l'image par U_p du 2-cycle $F_\infty^+/E(p^\beta)$ est une union de p^2 2-chaînes se recollant pour donner p copies du 2-cycle $F_\infty^+/E(p^{\beta+1})$. On observe que l'opérateur U_p tend à faire disparaître la monodromie venant des unités.

On définit le *symbole automorphe p-adique* de niveau K par :

$$S_K := \varprojlim_\beta U_p^{-\beta} \cdot S_{K,\beta} \in e_p^* \mathrm{H}_d(\overline{Y}_K, \mathcal{O})[[\mathrm{Cl}_F^+(p^\infty)]], \tag{7}$$

où e_p^* désigne l'idempotent quasi-ordinaire de Hida.

Étant donné un ensemble fini Q de premiers auxiliaires, on note $\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q)$ la p-partie du groupe de classes $\mathrm{Cl}_F^+(p^\infty Q)$. Alors, en adaptant la construction précédente à des sous-groupes K plus généraux on définit le symbole automorphe

$$S_K^Q := \varprojlim_\beta U_p^{-\beta} \cdot S_{K,\beta}^Q \in e_p^* \mathrm{H}_d(\overline{Y}_K, \mathcal{O})[[\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q)]], \tag{8}$$

qui sera utilisé pour associer des fonctions L p-adiques aux formes automorphes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$.

5.2 Fonctions L p-adiques pour GL_2/F

On dit qu'un poids cohomologique (k, w_0) est critique si $|w_0| \leq \min_\tau(k_\tau - 2)$. Soit π une représentation automorphe holomorphe cuspidale de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ de poids critique (k, w_0) qui est quasi-ordinaire en p et soit $\epsilon \in \{\pm 1\}^I$.

Théorème 5.1 *Il existe une fonction L p-adique* $L_{p,Q}^{\mathrm{new}}(\pi,\epsilon) \in \mathcal{O}[[\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q)]]$ *analytique primitive, satisfaisant la propriété d'interpolation suivante : pour tout caractère d'ordre fini* $\phi : \mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q) \to \mathcal{O}^\times$ *tel que* $\phi_\tau(-1) = \epsilon_\tau$ *pour tout* $\tau \in I$*, l'image de* $L_{p,Q}^{\mathrm{new}}(\pi,\epsilon)$ *par l'homomorphisme* $\mathcal{O}[[\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q)]] \to \mathcal{O}$ *qui en résulte vaut :*

$$\frac{L^{(pQ)}(\pi\otimes\phi,1)\Gamma(\pi,1)}{\Omega_{\pi,\epsilon}^{\mathrm{new}}}\prod_{v|p}\alpha_v^{-\operatorname{cond}(\phi_v\nu_v)}\prod_{v|pQ}\overline{\tau_v(\phi_v\nu_v,\xi_v)}Z_v,$$

où $\Omega_{\pi,\epsilon}^{\mathrm{new}} \in \mathbb{C}^\times / \mathcal{O}^\times$ *la période de Matsushima-Shimura-Harder,* α_v *est la valeur propre de* U_v *sur le vecteur nouveau de la représentation ordinaire* $\pi_v\otimes\nu_v^{-1}$*,* τ_v *est une somme de Gauss locale et* Z_v *est une constante locale explicite qui vaut* 1 *si* $\phi_v\nu_v$ *est ramifié (par convention* $\nu_v = 1$ *pour* $v\in Q$*).*

Notons que la propriété d'interpolation détermine uniquement $L_{p,Q}^{\mathrm{new}}(\pi,\epsilon)$ modulo $\mathcal{O}^\times$ sans admettre la conjecture de Leopoldt. Si π_p est ordinaire (c'est-à-dire si les ν_v sont non-ramifiés), alors $\prod_{v|pQ}\tau_v(\phi_v,\xi_v)$ est une somme de Gauss globale.

La démonstration du théorème repose sur l'évaluation des symboles automorphes p-adiques S_K^Q de (8) sur des classes de cohomologie de poids critique :

$$S_{K,Q}^{k,w_0} = \left(S_{K,Q,\beta}^{k,w_0}\right)_{\beta\geq 1} : e_p\,\mathrm{H}_c^d(Y_K,\mathcal{L}_K(k,w_0;\mathcal{O})) \to \mathcal{O}[[\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q)]]. \qquad (9)$$

Étant donné un ensemble fini de places $\Sigma\supset Q$ ne divisant pas $p\infty$, on établit une variante Σ-stabilisée qui est adaptée pour les fonctions L p-adiques en famille.

Théorème 5.2 *Il existe une fonction L p-adique* $L_{p,Q}^{\Sigma}(\pi,\epsilon) \in \mathcal{O}[[\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q)]]$ *analytique* Σ*-stabilisée, satisfaisant les propriétés suivantes :*

(i) pour tout caractère d'ordre fini $\phi : \mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q) \to \mathcal{O}^\times$ *tel que* $\phi_\tau(-1) = \epsilon_\tau$ *pour tout* $\tau\in I$*, l'image de* $L_{p,Q}^{\Sigma}(\pi,\epsilon)$ *par l'homomorphisme qui en résulte vaut (mêmes notations qu'en théorème 5.1) :*

$$\frac{L^{(p\Sigma)}(\pi\otimes\phi,1)\Gamma(\pi,1)}{\Omega_{\pi,\epsilon}^{\Sigma}}\prod_{v|p}\alpha_v^{-\operatorname{cond}(\phi_v\nu_v)}\prod_{v|pQ}\overline{\tau_v(\phi_v\nu_v,\xi_v)}Z_v.$$

(ii) si $(k,w_0{+}2)$ *est aussi critique, l'automorphisme de* $\mathcal{O}[[\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q)]]$ *donné par* $[a]\mapsto\chi_p(a)[a]$ *envoie* $L_{p,Q}^{\Sigma}(\pi,\epsilon)$ *sur* $L_{p,Q}^{\Sigma}(\pi\otimes|\cdot|_{\mathbb{A}},\epsilon)$*.*

(iii) pour $v\in Q$ *l'image de* $L_{p,Q}^{\Sigma}(\pi,\epsilon)$ *par la projection*

$$\mathcal{O}[[\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q)]] \longrightarrow \mathcal{O}[[\mathrm{Cl}_{F,p}(p^\infty Qv^{-1})]], [a]\mapsto[\varpi_v^{-1}\cdot a]$$

vaut $-\mathrm{N}(v)^{-1}\cdot L_{p,Qv^{-1}}^{\Sigma}(\pi,\epsilon)$*.*

6 Cohomologie ordinaire des variétés modulaires de Hilbert

En utilisant des méthodes cohomologiques d'interpolation p-adique, Hida construit dans [H4] des représentations Λ-adiques continues de dimension deux de Gal_F à valeurs dans des algèbres d'Iwasawa à plusieurs variables. À cette fin, il développe dans [H3, H5] la théorie des formes modulaires de Hilbert Λ-adiques et démontre des théorèmes de contrôle exact pour les algèbres de Hecke (quasi-)ordinaires. Sa preuve repose, via la correspondance de Jacquet-Langlands et selon la parité de d, sur des théorèmes de contrôle exact pour des variétés de Shimura de dimension zéro ou un, associées à des algèbres à division sur F ramifiées en toutes les places à l'infini sauf éventuellement une. À la fin de l'introduction de [H3], Hida souhaite que ses résultats soient étendus à d'autres variétés de Shimura quaternioniques. Dans [1] on traite le cas de $M_2(F)$ correspondant aux variétés modulaires de Hilbert.

Nous allons maintenant introduire les algèbres intervenant dans la théorie de Hida pour GL_2/F, puis énoncer nos résultats.

6.1 Algèbres d'Iwasawa pour GL_1/F

Fixons un nombre premier impair p et soit Σ un ensemble fini de places de F ne divisant pas p. Rappelons qu'alors le pro-p quotient abélien maximal de $\mathrm{Gal}_{F,\Sigma p}$ est isomorphe au pro-p quotient maximal $\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty\Sigma)$ du groupe de classes de rayon $\mathrm{Cl}_F^+(\Sigma p^\infty)$ et que l'on a des suites exactes de groupes abeliens :

$$1 \to (\mathfrak{o}\otimes\mathbb{Z}_p)^\times/\overline{E(\Sigma)} \to \mathrm{Cl}_F^+(\Sigma p^\infty) \to \mathrm{Cl}_F^+(\Sigma) \to 1,$$
$$1 \to \prod_{v\in\Sigma}(\mathfrak{o}/v)^\times \to \mathrm{Cl}_F^+(\Sigma p^\infty) \to \mathrm{Cl}_F^+(p^\infty) \to 1,$$

qui restent exactes après tensorisation avec $\mathbb{Z}_p$.

Définition 6.1 *On considère les $\mathcal{O}$-algèbres locales complètes :*

$$\Lambda^{\mathrm{ord}} = \mathcal{O}[[\mathrm{Cl}_F^{(p)}(\Sigma p^\infty)]], \Lambda^{\det} = \mathcal{O}[[(\mathfrak{o}\otimes\mathbb{Z}_p)^{\times(p)}]] \text{ et } \Lambda^{\mathrm{q.o.}} = \Lambda^{\mathrm{ord}}\widehat{\otimes}\Lambda^{\det}.$$

La théorie de corps de classes globale nous permet de voir le caractère cyclotomique χ_p comme caractère de $\mathrm{Cl}_F^{(p)}(\Sigma p^\infty)$.

Définition 6.2 *On dit qu'un homomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres $\chi : \Lambda^{\mathrm{q.o.}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ est algébrique s'il existe un poids cohomologique (k, w_0) tel que la restriction de χ à $\mathrm{Cl}_F^{(p)}(\Sigma p^\infty)$ (resp. à $(\mathfrak{o}\otimes\mathbb{Z}_p)^{\times(p)}$) soit le produit d'un caractère d'ordre fini avec le caractère $\chi_p^{-w_0}$ (resp. $x \mapsto x^{(k-2t-w_0t)/2}$).*

Le déterminant munit $\mathcal{R}^{\text{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma}$ d'une structure de Λ^{ord}-algèbre, alors que la restriction aux groupes de décomposition aux premiers divisant p munit $\mathcal{R}^{\text{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma}$ d'une structure de Λ^{det}-algèbre. Donc $\mathcal{R}^{\text{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma}$ est naturellement une $\Lambda^{\text{q.o.}}$-algèbre. On dit qu'un homomorphisme $\mathcal{R}^{\text{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ est algébrique de poids (k, w_0) si sa restriction à $\Lambda^{\text{q.o.}}$ l'est.

De même, on voit que $\mathcal{R}^{\text{ord}}_{\bar\rho,\Sigma}$ est une Λ^{ord}-algèbre et l'on définit la notion d'homomorphisme algébrique $\mathcal{R}^{\text{ord}}_{\bar\rho,\Sigma} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$.

6.2 Tours p-adiques de variétés modulaires de Hilbert

Soit $Y_1(p^\alpha)$ (resp. $Y_{11}(p^\alpha)$) la variété modulaire de Hilbert de niveau $K_1(p^\alpha)K^p_\Sigma$ (resp. $K_{11}(p^\alpha)K^p_\Sigma$), où $K^p_\Sigma = \prod_{v\nmid p} K_v$ avec K_v un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GL}_2(K_v)$, maximal si $v \notin \Sigma$.

Pour tout poids cohomologique (k, w_0) l'on considère les modules de cohomologie (quasi-)ordinaire :

$$\mathcal{H}^{\text{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma}(k, w_0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\varinjlim_{\alpha\geq 1} e\,\mathrm{H}^d\left(Y_{11}(p^\alpha), \mathcal{L}(k, w_0; E/\mathcal{O})\right)_{\bar\rho}, E/\mathcal{O}\right) \quad \text{et}$$

$$\mathcal{H}^{\text{ord}}_{\bar\rho,\Sigma}(k, w_0) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}\left(\varinjlim_{\alpha\geq 1} e\,\mathrm{H}^d\left(Y_1(p^\alpha), \mathcal{L}(k, w_0; E/\mathcal{O})\right)_{\bar\rho}, E/\mathcal{O}\right),$$

où e est une variante de l'idempotent e_p de Hida dépendant de Σ et ϵ.

On vérifie alors que $\mathcal{H}^{\text{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma}(k, w_0)$ (resp. $\mathcal{H}^{\text{ord}}_{\bar\rho,\Sigma}(k, w_0)$) est naturellement une algèbre sur $\Lambda^{\text{q.o.}}$ (resp. sur Λ^{ord}).

Théorème 6.3 *Si $\bar\rho$ satisfait les hypothèses 1 et 2 avec $\bar\pi$ (quasi-)ordinaire de poids $\bar k > 2t$, alors $\mathcal{H}^{\text{ord}}_{\bar\rho,\Sigma}(\bar k, \bar w_0)$ (resp. $\mathcal{H}^{\text{q.o.}}_{\bar\rho,\Sigma}(k, w_0)$) est contrôlé exactement en tant que Λ^{ord}-module (resp. $\Lambda^{\text{q.o.}}$-module) au sens de [H7].*

Ce résultat a comme conséquence l'absence de torsion dans la partie quasi-ordinaire de la cohomologie d'une variété modulaire de Hilbert. La différence avec le théorème 4.1 est que l'on ne suppose plus que le niveau soit premier à p, ni que le poids soit p-petit.

Corollaire 6.4 *Supposons que $\bar\rho$ satisfait les hypothèses 1 et 2 avec $\bar\pi$ quasi-ordinaire de poids $\bar k > 2t$. Alors $\mathrm{H}^d(Y_{11}(p^\alpha), \mathcal{L}_K(w, w_0; \mathcal{O}))_{\bar\rho}$ est un $\mathcal{O}$-module libre, dont le dual de Pontryagin est isomorphe à $\mathrm{H}^d(Y_{11}(p^\alpha), \mathcal{L}_K(w, w_0; E/\mathcal{O}))_{\bar\rho}$.*

7 Fonctions L p-adiques en famille

On s'intéresse à la construction de fonctions L p-adiques de familles de formes automorphes quasi-ordinaires de Hilbert dans des anneaux de déformation universels de représentations galoisiennes, en vue de la formulation de conjectures principales à la Iwasawa-Greenberg [G] pour GL_2 sur des corps totalement réels.

Pour $F = \mathbb{Q}$, des fonctions L p-adiques pour les familles de Hida ont été construites par Kitagawa [Ki] et par Greenberg-Stevens [GS]. La méthode de Greenberg et Stevens utilise moins d'hypothèses, mais donne un résultat moins précis que celui de Kitagawa, car l'on inverse p et l'on travaille uniquement au voisinage d'un poids.

Dans la dernière partie de [1] l'on généralise les résultats de Kitagawa aux familles de Hida de formes modulaires de Hilbert. Nous travaillons avec la notion la plus universelle de famille de Hida, comme composante locale d'une algèbre de Hecke (quasi-)ordinaire, naturellement isomorphe à un anneau de déformation universel (les familles de Hida usuelles deviennent alors des branches de ces dernières). Quand $F = \mathbb{Q}$, la construction de Kitagawa a été portée à ce degré de généralité par Emerton, Pollack et Weston [EPW].

Les familles sont alors paramétrées par des représentations irréductibles

$$\bar{\rho} : \mathrm{Gal}_{F,\Sigma p} \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p),$$

totalement impaires et quasi-ordinaires en p.

Le résultat suivant confirme une conjecture de Greenberg [G, §4] proposant de construire des fonctions L p-adiques analytiques pour des familles ordinaires de formes automorphes de Hilbert dans des anneaux de déformation universels (plutôt que dans des algèbres d'Iwasawa abstraites).

Théorème 7.1 *Supposons que $\bar{\rho}$ satisfait les hypothèses 1 et 2 avec $\bar{\pi}$ ordinaire de poids $((\bar{w}_0 + 2)t, \bar{w}_0)$ avec $\bar{w}_0 > 0$. Alors il existe une fonction L p-adique $L_{p,Q}^{\mathrm{ord}}(\bar{\rho}, \Sigma, \epsilon) \in \mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}^{\mathrm{ord}}[[\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty Q)]]$, déterminée uniquement modulo $\mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}^{\mathrm{ord},\times}$ par la propriété universelle suivante : la spécialisation de $L_{p,Q}^{\mathrm{ord}}(\bar{\rho}, \Sigma, \epsilon)$ par tout homomorphisme algébrique $\mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}^{\mathrm{ord}} \to \mathcal{O}$, provenant d'après le théorème 2.3 d'une représentation automorphe cuspidale π de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ ordinaire en p et de poids parallèle, vaut la fonction L p-adique $L_{p,Q}^{\Sigma}(\pi, \epsilon)$.*

Soit $\mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}^{\det}$ la $\Lambda^{\det}$-algèbre paramétrisant les déformations quasi-ordinaires de $\bar{\rho}$ dont le déterminant vaut $\det(\rho_{\bar{\pi},p})$. Puisque p est impaire, toute déformation quasi-ordinaire de $\bar{\rho}$ est la tordue par un caractère d'une déformation ayant déterminant $\det(\rho_{\bar{\pi},p})$, d'où l'isomorphisme canonique :

$$\mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}^{\mathrm{q.o.}} = \mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}^{\det}[[\mathrm{Cl}_F^{(p)}(p^\infty \Sigma)]]. \qquad (10)$$

Théorème 7.2 *Supposons que $\bar{\rho}$ satisfait les hypothèses 1 et 2 avec $\bar{\pi}$ quasi-ordinaire de poids $((\bar{w}_0 + 2)t, \bar{w}_0)$ avec $\bar{w}_0 > 0$. Alors il existe une fonction L p-adique $L_p^{\mathrm{q.o.}}(\bar{\rho}, \Sigma, \epsilon) \in \mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}^{\mathrm{q.o.}}$ déterminée uniquement modulo $\mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}^{\mathrm{det},\times}$ par la propriété d'interpolation suivante : la spécialisation de $L_p^{\mathrm{q.o.}}(\bar{\rho}, \Sigma, \epsilon)$ par tout homomorphisme algébrique $\mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}^{\mathrm{det}} \to \mathcal{O}$ de poids $((\bar{w}_0 + 2)t, \bar{w}_0)$ donne la fonction L p-adique $L_{p,\Sigma}^{\Sigma}(\pi, \epsilon)$ d'une représentation automorphe cuspidale π quasi-ordinaire de poids $((\bar{w}_0 + 2)t, \bar{w}_0)$.*

Ces recherches peuvent être prolongées dans plusieurs directions. Tout d'abord l'on peut essayer de démontrer que $L_p^{\mathrm{q.o.}}(\bar{\rho}, \Sigma, \epsilon)$ est universelle, au sens que sa spécialisation en tout point algébrique de $\mathcal{R}_{\bar{\rho},\Sigma}^{\mathrm{det}}$ (non-nécessairement de poids $((\bar{w}_0 + 2)t, \bar{w}_0)$) donne la fonction L p-adique de la forme automorphe correspondante. La résolution de ce problème pourrait nécessiter la construction de mesures à $2d$ variables relevant $L_p^{\mathrm{q.o.}}(\bar{\rho}, \Sigma, \epsilon)$, tout comme dans la construction de la fonction zêta p-adique de F par les méthodes de Shintani et de Deligne-Ribet. C'est un sujet délicat sur lequel nous espérons revenir dans des travaux ultérieurs.

Ensuite, on peut essayer d'associer des fonctions L p-adiques à des familles de formes automorphes de pente finie ($U_p \neq 0$), non-nécessairement ordinaires, à la Greenberg-Stevens [GS] (voir aussi [BL]). Dans un tel but, les techniques développées par Ash et Stevens [AS] peuvent s'avérer très utiles et Daniel Barrera travaille sur leur généralisation à GL_2 sur un corps de nombres. Il existe une autre approche via la construction d'une "Eigenvariété" de Hilbert, mais malgré les travaux [KL] et [Sa] la théorie géométrique des formes surconvergeantes de Hilbert reste très incomplète.

Enfin, on peut s'intéresser à des fonctions L p-adiques de formes automorphes sur d'autres groupes que GL_2.

8 Formes modulaires de poids 1 et familles de Hida

Dans cette partie nous décrivons les résultats de [2] sur les formes modulaires de poids un dans des familles de Hida.

Avant de passer aux formes modulaires de poids un, nous rappelons d'abord quelques notions de base et quelques résultats bien connus (au moins des experts) concernant les formes de poids supérieur ou égal à deux dans des familles de Hida.

On s'attend à ce que les résultats de cette partie puissent être étendus aux formes modulaires de Hilbert.

8.1 Familles de Hida

Soit p un nombre premier impair et soit $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[1+p\,\mathbb{Z}_p]] \simeq \mathbb{Z}_p[[X]]$ l'algèbre locale d'Iwasawa classique. Fixons un entier N, premier à p, et un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Soit L la clôture intégrale de Λ dans une extension finie de son corps des fractions. Un homomorphisme d'algèbres $L \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ est dit arithmétique de poids $k \geq 1$, si sa restriction à Λ est donnée par $X \mapsto \zeta(1+p)^{k-1} - 1$, où ζ désigne une racine de l'unité d'ordre une puissance de p.

Par définition une famille de Hida de niveau N est une série formelle $\mathcal{F} \in L[[q]]$ dont la spécialisation par tout homomorphisme arithmétique de poids $k \geq 2$ donne le q-développement d'une forme modulaire parabolique de poids k, propre pour les opérateurs de Hecke, normalisée, N-primitive et p-ordinaire (au sens qu'elle est propre pour l'opérateur U_p et sa valeur propre est une unité p-adique). Si ζ est d'ordre p^{r-1}, $r \geq 1$, alors le niveau d'une telle spécialisation est Np^r.

Les familles de Hida ont beaucoup de ressemblances avec les formes nouvelles. Chaque famille $\mathcal{F}$ a un caractère central qui est un certain caractère de Dirichlet $\psi_{\mathcal{F}} : (\mathbb{Z}/Np)^\times \to \mathbb{C}^\times$. D'après un résultat de Hida, tout comme pour les formes nouvelles, il existe un nombre fini de familles de Hida de niveau N, ce qui a comme corollaire le fait que le corps $K_{\mathcal{F}}$ engendré par les coefficients de Fourier de $\mathcal{F}$ est une extension finie du corps des fractions de Λ.

Une communauté de Hida $\{\mathcal{F}\}$ est formée par les familles d'un certain niveau ayant la même réduction modulo l'idéal maximal de Λ.

En termes du spectre de l'algèbre de Hecke p-adique ordinaire primitive $\mathbb{T}_N^{\mathrm{new}}$:

(i) les idéaux premiers minimaux correspondent aux $\mathrm{Gal}_{\mathrm{Frac}(\Lambda)}$-orbites de familles de Hida,

(ii) les idéaux premiers maximaux correspondent aux $\mathrm{Gal}_{\mathbb{F}_p}$-orbites de communautés de Hida et

(iii) les idéaux premiers arithmétiques correspondent aux $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$-orbites de spécialisations classiques en poids $k \geq 2$.

Le parallélisme entre les familles de Hida et les formes nouvelles est complété par une construction, due à Hida [H1], associant à toute famille de Hida $\mathcal{F}$ une représentation continue irréductible

$$\rho_{\mathcal{F}} : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(K_{\mathcal{F}}) \tag{11}$$

non-ramifiée en dehors de Np et telle que pour tout premier ℓ ne divisant pas Np, la trace de l'image par $\rho_{\mathcal{F}}$ d'un Frobenius arithmétique en ℓ est égale au ℓ-ème coefficient de Fourier de $\mathcal{F}$. De plus $\det \rho_{\mathcal{F}} = \psi_{\mathcal{F}}\chi_{\mathrm{cyc}}$, où χ_{cyc} désigne le caractère cyclotomique Λ-adique.

Si $\rho_{\mathcal{F}} \simeq \rho_{\mathcal{F}} \otimes \epsilon_K$, où ϵ_K désigne le caractère de Dirichlet associé au corps quadratique (imaginaire) K, alors l'on dit que $\mathcal{F}$ est à multiplication complexe (CM).

8.2 Formes poids 1 dans une famille de Hida

Par définition toute famille de Hida $\mathcal{F}$ admet une infinité de spécialisations en chaque poids $k \geq 2$ qui sont des formes modulaires classiques. Si $\mathcal{F}$ est CM, alors elle admet aussi une infinité de spécialisations classiques de poids 1. En revanche, si $\mathcal{F}$ n'a pas de CM, alors il a été démontré dans [GV] (sous certaines hypothèses qui ont été enlevées dans [2]) que $\mathcal{F}$ ne peut avoir qu'un nombre fini de spécialisations classiques de poids 1.

Dans la première partie du travail [2] en collaboration avec Eknath Ghate, nous rendons ce résultat quantitatif, en donnant une borne explicite (souvent égale à 1) du nombre de formes modulaires classiques de poids 1 dans une famille de Hida non-CM donnée.

Il est bien connu que l'image projective de la représentation galoisienne associée à une forme modulaire de poids 1 est d'un des trois types suivants : CM (diédrale pour un corps quadratique imaginaire), RM (diédrale pour un corps quadratique réel) ou exceptionnelles (isomorphe à A_4, S_4 ou A_5). Donc pour qu'une famille de Hida puisse se spécialiser sur une forme modulaire de poids 1, il faut que l'image de la représentation résiduelle $\bar{\rho}_{\mathcal{F}}$ soit du même type : CM, RM ou exceptionnelle. Nous ne connaissons aucun exemple de famille de Hida non-CM, qui soit résiduellement de type CM. Dans les deux autres cas, nous établissons les énoncés suivants :

Théorème 8.1 *Soit $p \geq 7$ et soit $\mathcal{F}$ une famille de Hida de type résiduel exceptionnel.*

(i) Alors $\mathcal{F}$ admet au plus une spécialisation classique en poids 1.

(ii) Si l'on suppose de plus que $\bar{\rho}_{\mathcal{F}}$ est p-distingué et que p ne divise pas $\varphi(N)$, alors la communauté $\{\mathcal{F}\}$ admet une unique spécialisation classique en poids 1.

La démonstration de la dernière assertion utilise les théorèmes principaux de [BT] et [Bu].

Théorème 8.2 *Soit $\mathcal{F}$ une famille de Hida non-CM de niveau N, résiduellement de type RM par K (c'est-à-dire $\bar{\rho}_{\mathcal{F}} \simeq \bar{\rho}_{\mathcal{F}} \otimes \varepsilon_{K|\mathbb{Q}}$). Alors le nombre de spécialisations classiques de poids 1 de $\mathcal{F}$ est borné par la valuation p-adique de*

$$|\operatorname{Cl}_K| \cdot \mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\epsilon_K^{p-1} - 1) \cdot \prod_{\substack{\ell | N \\ \ell \text{ décomp. dans } K}} (\ell - 1) \cdot \prod_{\substack{\ell | N \\ \ell \text{ inerte dans } K}} (\ell + 1),$$

où Cl_K désigne le groupe de classes de K et ϵ_K son unité fondamentale.

On fournit également des exemples de familles de Hida admettant au moins deux spécialisations classiques de poids 1. Par exemple la famille 7-adique de niveau $4 \cdot 23$ dans le tableau 2 contient les deux dernières formes de poids 1 du tableau 1.

8.3 Familles de Hida passant par une forme de poids 1

Il est bien connu (voir [H2]) que l'algèbre de Hecke ordinaire $\mathbb{T}_N^{\mathrm{new}}$ est étale aux points correspondants aux formes modulaires classiques de poids $k \geq 2$. Ceci a pour conséquence que l'Eigencurve de Coleman et Mazur est lisse en ces points. Dans la dernière partie de [2] nous démontrons que $\mathbb{T}_N^{\mathrm{new}}$ n'est jamais étale aux points correspondants à des formes modulaires classiques de poids 1 avec RM. En revanche, on s'attend à ce qu'elle soit étale aux autres points classiques de poids 1.

Le résultat de Hida mentionné ci-dessus a comme corollaire que toute forme modulaire classique ordinaire de poids $k \geq 2$ appartient à une unique famille de Hida (à conjugaison galoisienne près).

Par ailleurs, il est bien connu (voir par exemple [W1]) que toute forme de poids 1 propre p-stabilisée (forcément ordinaire) appartient à une famille de Hida. Il est donc naturel de se demander s'il existe des formes modulaires de poids 1 appartenant à plusieurs familles de Hida (non-conjuguées). La dernière partie de [2] décrit la construction suivante :

Soit f une forme modulaire de poids 1 dont l'image galoisienne projective est le groupe de Klein à 4 éléments (voir le tableau 1). Alors f est à multiplication réelle (RM) par $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$, $D > 0$, et à multiplication complexe (CM) par $\mathbb{Q}(\sqrt{D'})$, $D' < 0$ et par $\mathbb{Q}(\sqrt{D''})$ avec $D'' = DD' < 0$. Soit p un premier totalement décomposé dans $\mathbb{Q}(\sqrt{D}, \sqrt{D'})$ et soit $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) la famille de Hida p-adique avec CM par $\mathbb{Q}(\sqrt{D'})$ (resp. par $\mathbb{Q}(\sqrt{D''})$) passant par f. Il est alors facile de voir que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ne sont pas conjuguées par Galois.

Ainsi $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des familles de Hida se spécialisant en poids 1 sur la même forme f.

Comme exemple numérique l'on peut prendre la 5-ème forme du tableau 1 qui est de niveau 111. Elle possède une unique stabilisation ordinaire pour $p = 7$ qui est une forme modulaire f de niveau 777. Prenons $D = 37$, $D' = -3$ et $D'' = -111$. Les deux dernières lignes du tableau 2 confirment l'existence de deux familles de Hida 7-adiques $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ passant par f, avec CM par $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-111})$, respectivement, et qui ne sont donc pas conjuguées par Galois.

Enfin, la géométrie de $\mathbb{T}_N^{\mathrm{new}}$ aux points classiques de poids 1 avec RM, semble intimement liée aux *twists internes* pour les familles de Hida, un sujet d'intérêt indépendant que nous étudions dans [2, §7].

8.4 Exemples numériques

Les calculs ont été faits avec `Pari` et `Magma`. Chaque ligne du tableau 1 correspond à une forme nouvelle $f = \sum_{n>0} a_n q^n$ de poids 1 avec RM par $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, de niveau N et nebentypus ψ. La colonne CM indique les discriminants des corps quadratiques par lesquels f a CM et h désigne un certain nombre de classes de rayon. Lorsque $h = 1$, l'image projective de ρ_f est isomorphe au groupe de Klein.

Tab. 1 – Formes modulaires nouvelles de poids 1 avec RM

N	ψ	D	CM	h	primes $\ell < 100$ such that $a_\ell \neq 0$
39	$\epsilon_{13}\epsilon_{-3}$	13	$-3, -39$	1	$3, 13, 43, 61, 79$
55	$\epsilon_5\epsilon_{-11}$	5	$-11, -55$	1	$5, 11, 31, 59, 71, 89$
56	$\epsilon_8\epsilon_{-7}$	8	$-7, -56$	1	$2, 7, 23, 71, 79$
95	$\epsilon_5\epsilon_{-19}$	5	$-19, -95$	1	$5, 11, 19, 61$
111	$\epsilon_{37}\epsilon_{-3}$	37	$-3, -111$	1	$3, 7, 37, 67, 73$
120	$\epsilon_5\epsilon_8\epsilon_{-3}$	40	$-15, -24$	1	$2, 3, 5, 31, 53, 79, 83$
145	$\epsilon_5\omega_{29}^7$	5	$-$	2	$5, 11, 19, 29, 31, 41, 61, 71, 79, 89$
145	$\epsilon_{29}\omega_5$	29	$-$	2	$5, 7, 13, 23, 29, 53, 59, 67, 83$
155	$\epsilon_5\epsilon_{-31}$	5	$-31, -155$	1	$5, 19, 31, 41, 59, 71$
183	$\epsilon_{61}\epsilon_{-3}$	61	$-3, -183$	1	$3, 13, 19, 61, 73, 97$
184	$\epsilon_8\epsilon_{-23}$	8	$-23, -184$	1	$2, 23, 31, 41, 47, 71, 73$
203	$\epsilon_{29}\epsilon_{-7}$	29	$-7, -203$	1	$7, 23, 29, 53, 67, 71$
255	$\epsilon_5\epsilon_{17}\epsilon_{-3}$	$\epsilon_5\epsilon_{17}$	$-15, -51$	1	$3, 5, 17, 19, 23$
259	$\epsilon_{37}\epsilon_{-7}$	37	$-7, -259$	1	$7, 11, 37, 53, 67, 71$
328	$\epsilon_8\omega_{41}^5$	8	$-$	4	$2, 7, 17, 23, 31, 41, 47, 71, 73, 79, 89, 97$
371	$\epsilon_{53}\omega_7$	53	$-$	3	$7, 11, 13, 17, 29, 37, 43, 47, 53, 59, 89$
$4 \cdot 7 \cdot 23$	$\epsilon_{-4}\epsilon_{-7}\epsilon_{23}$	92	$-7, -644$	1	
$4 \cdot 7^2 \cdot 23$	$\epsilon_{-4}\epsilon_{-7}\epsilon_{23}$	92	$-$	7	

Tab. 2 – Familles de Hida se spécialisant sur une forme de Tab. 1

$N_\mathcal{F}$	p	$\psi_\mathcal{F}$	rk $\mathbb{T}_N^{\text{new}}$	rk $\mathbb{T}_{N,\bar{\rho}}^{\text{new}}$	rk$L$	twists	$\lvert\mathbb{F}\rvert$	im.proj($\bar{\rho}_\mathcal{F}$)
13	3	$\epsilon_{13}\epsilon_{-3}$	2	2	2	ϵ_{13}	3	D_4
5	11	$\epsilon_5\epsilon_{-11}$	2	2	2	ϵ_5	11	D_4
8	7	$\epsilon_8\epsilon_{-7}$	2	2	2	ϵ_8	7	D_4
5	19	$\epsilon_5\epsilon_{-19}$	2	2	2	ϵ_5	19	D_4
37	3	$\epsilon_{37}\epsilon_{-3}$	8	4	?	?	3	D_4
$5 \cdot 8$	3	$\epsilon_5\epsilon_8\epsilon_{-3}$	16	2	2	$\epsilon_5\epsilon_8$	3^2	D_8
5	29	$\epsilon_5\omega_{29}^7$	2	2	2	ϵ_5	29	D_8
29	5	$\epsilon_{29}\omega_5$	12	2	2	ϵ_{29}	5	D_8
5	31	$\epsilon_5\epsilon_{-31}$	6	2	2	ϵ_5	31	D_4
61	3	$\epsilon_{61}\epsilon_{-3}$	14	2	2	ϵ_{61}	3	D_4
8	23	$\epsilon_8\epsilon_{-23}$	8	2	2	ϵ_8	23	D_4
29	7	$\epsilon_{29}\epsilon_{-7}$	6	4	?	?	7	D_4
$5 \cdot 17$	3	$\epsilon_5\epsilon_{17}\epsilon_{-3}$	24	2	2	$\epsilon_5\epsilon_{17}$	3^2	D_8
37	7	$\epsilon_{37}\epsilon_{-7}$	8	2	2	ϵ_{37}	7	D_4
8	41	$\epsilon_8\omega_{41}^5$	4	2	2	ϵ_8	41	D_{16}
53	7	$\epsilon_{53}\omega_7$	30	2	2	ϵ_{53}	7	D_{12}
$4 \cdot 23$	7	$\epsilon_{-4}\epsilon_{-23}\epsilon_{-7}$	34	2	2	$\epsilon_{-4}\epsilon_{-23}$	7	D_4
$3 \cdot 37$	7	$\epsilon_{-3}\epsilon_{37}$	74	2	2	CM par -3	7	D_4
$3 \cdot 37$	7	$\epsilon_{-3}\epsilon_{37}$	74	2	2	CM par -111	7	D_4

9 Vecteurs test pour des formes trilinéaires

Soit E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau des entiers $\mathcal{O}$ et d'uniformisante ϖ. Soient V_1, V_2 et V_3 trois représentations irréductibles admissibles complexes de dimension infinie de $G = \mathrm{GL}_2(E)$ de caractères centraux ω_1, ω_2 et ω_3 et de conducteurs n_1, n_2 et n_3. En utilisant la théorie des paires de Gelfand, Prasad démontre dans [Pr] que l'espace des formes linéaires G-invariantes sur $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ est de dimension au plus un (G étant vu comme sous-groupe de $G \times G \times G$ par la diagonale). La non-nullité de cet espace implique la condition suivante sur les caractères centraux :

$$\omega_1\omega_2\omega_3 = 1. \tag{12}$$

Sous cette condition (qui sera toujours tacitement supposée vraie dans la suite), Prasad démontre qu'il existe une forme trilinéaire G-invariante non-nulle ℓ sur $V_1 \times V_2 \times V_3$ si, et seulement si, le facteur epsilon associé par Déligne (via la correspondance de Langlands locale) à $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ vaut 1 (c'est par exemple le cas si au moins l'une parmi V_1, V_2 et V_3 est une série principale). Plaçons-nous dans ce cas et fixons une telle forme trilinéaire ℓ.

Une question naturelle est de trouver un tenseur pur dans $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ n'appartenant pas au noyau de ℓ. Un tel vecteur est appelé vecteur test.

Le premier résultat en ce sens, dû à Prasad [Pr, Théorème 1.3], affirme que si les trois représentations sont des séries principales non-ramifiées, alors ℓ est non-nulle sur la droite nouvelle $V_1^K \otimes V_2^K \otimes V_3^K$, où K désigne le compact maximal standard de G.

On peut alors se demander si l'on peut toujours prendre comme vecteurs test des vecteurs nouveaux. Rappelons que chaque V_i possède une droite privilégiée $V_i^{I_{n_i},\omega_i}$, appelée droite nouvelle, sur laquelle le n_i-ème sous-groupe d'Iwahori I_{n_i} de K agit par $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \omega_i(d)$. Tout vecteur non-nul de cette droite est appelé vecteur nouveau et noté v_i.

Cependant, comme c'est le cas, par exemple, si V_1 et V_2 sont non-ramifiées, mais V_3 est ramifié, ℓ peut être nulle sur la droite nouvelle

$$V_1^{I_{n_1},\omega_1} \otimes V_2^{I_{n_2},\omega_i} \otimes V_3^{I_{n_3},\omega_3}.$$

Le premier résultat du travail [3] en collaboration avec Louise Nyssen consiste à contourner ce problème pour trouver des vecteurs test.

Théorème 9.1 *Supposons que V_1 et V_2 sont des séries principales non-ramifiées. Alors $\gamma^{n_3} \cdot v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ et $v_1 \otimes \gamma^{n_3} \cdot v_2 \otimes v_3$ sont des vecteurs test, où* $\gamma = \begin{pmatrix} \varpi^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dans le cas général, on aimerait exhiber un vecteur test comme élément d'une G-orbite privilégiée à l'intérieur de la $G \times G \times G$-orbite de $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$.

Considérons l'arbre dont les sommets sont les sous-groupes ouverts compacts maximaux de G et dont les arêtes sont des sous-groupes d'Iwahori, chaque Iwahori étant l'intersection des compacts maximaux situés aux extrémités de l'arête qu'il occupe. L'Iwahori standard I_1 correspond à l'arête entre K et $\gamma K \gamma^{-1}$. Plus généralement, pour $n \geq 1$, le n-ème sous-groupe d'Ihahori standard

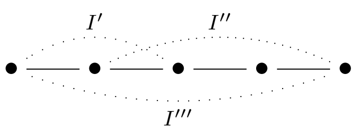
$$I_n = \begin{pmatrix} \mathcal{O}^\times & \mathcal{O} \\ \varpi^n \mathcal{O} & \mathcal{O}^\times \end{pmatrix}$$

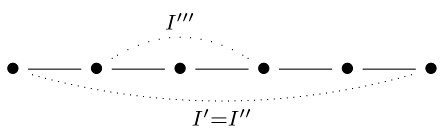
correspond au chemin entre K et $\gamma^n K \gamma^{-n}$, et G agit transitivement sur l'ensemble des chemins de longueur n.

Trouver une G-orbite privilégiée dans la $G \times G \times G$-orbite de $v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ revient donc à trouver une G-classe de conjugaison privilégiée dans la $G \times G \times G$-classe de conjugaison de $I_{n_1} \times I_{n_2} \times I_{n_3}$.

Une façon naturelle de définir une telle classe de conjugaison de $I_{n_1} \times I_{n_2} \times I_{n_3}$ serait en imposant que le plus petit des compacts ouverts soit l'intersection des deux autres. Par exemple le vecteur test $\gamma^{n_3} \cdot v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ du théorème 9.1 correspond à la classe de conjugaison $\gamma^{n_3} K \gamma^{-n_3} \times K \times I_{n_3}$.

Sur l'arbre, cette condition sur les trois compacts ouverts se traduit par le fait que le chemin le plus long doit être l'enveloppe convexe des deux autres chemins, comme montré sur les deux diagrammes suivants :





Si η_1, η_2 et η_3 sont trois caractères de $F^\times$ tels que $\eta_1\eta_2\eta_3 = 1$, alors $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ et $(V_1 \otimes \eta_1) \otimes (V_2 \otimes \eta_2) \otimes (V_3 \otimes \eta_3)$ sont canoniquement isomorphes en tant que G-représentations, et il revient donc au même de chercher des vecteurs test dans l'un ou dans l'autre. Comme il est naturel d'imposer que le vecteur test soit fixe par un sous-groupe ouvert compact aussi grand que possible, les conducteurs des $V_i \otimes \eta_i$ doivent être aussi petits que possible. Ceci mène à la définition suivante : soit $n_i^{\min}$ le conducteur minimal de V_i, c'est-à-dire la valeur minimal pour le conducteur de $V_i \otimes \eta$ quand η varie. Soit $n^{\min}$ la valeur minimale de

$$\mathrm{cond}(V_1 \otimes \eta_1) + \mathrm{cond}(V_2 \otimes \eta_2) + \mathrm{cond}(V_3 \otimes \eta_3),$$

quand η_1, η_2 et η_3 varient en respectant la condition $\eta_1\eta_2\eta_3 = 1$.

Définition 9.2 *(i) On dit que V_i est minimale si $n_i = n_i^{\min}$.*

(ii) On dit que le triplet de représentations (V_1, V_2, V_3) est minimal si

(a) soit chaque V_i est supercuspidale ou minimale,

(b) soit aucune des V_i n'est supercuspidale et $n^{\min} = n_1 + n_2 + n_3$.

Il est clair que pour tout (V_1, V_2, V_3) il existe toujours des caractères η_1, η_2 et η_3 tels que $\eta_1\eta_2\eta_3 = 1$ et $(V_1 \otimes \eta_1, V_2 \otimes \eta_2, V_3 \otimes \eta_3)$ est minimal.

Voici le résultat principal de [3] :

Théorème 9.3 *Supposons qu'au moins une parmi V_1, V_2 and V_3 n'est pas supercuspidale, et que si deux parmi elles sont des supercuspidales de même conducteur, alors la troisième est une série principale ramifiée. Supposons que (V_1, V_2, V_3) est minimal et que le facteur epsilon de $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ vaut 1. Enfin, sans perdre en généralité, supposons que $n_3 \geq n_1$ et $n_3 \geq n_2$.*

Alors $v_1 \otimes \gamma^{n_3-n_2} \cdot v_2 \otimes v_3$ et $\gamma^{n_3-n_1} \cdot v_1 \otimes v_2 \otimes v_3$ sont des vecteurs test.

Nous démontrons également une variante du théorème ci-dessus incluant les induites réductibles, comme dans le travail de Harris et Scholl [HS].

D'après le théorème 9.3 il reste deux cas où l'on ne sait pas choisir des vecteurs test. Celui de deux supercuspidales de même conducteur et celui de trois supercuspidales.

Tout récemment, on a pu résoudre le premier cas. La preuve repose sur des calculs précis de sommes de produits doubles de facteurs ϵ et utilise la notion de *n-closeness* introduite par Winnie Li, ainsi que certains de ses résultats sur ce thème.

En revanche, le deuxième cas s'avère beaucoup plus difficile techniquement car il s'agit d'évaluer des sommes de produits triples de facteurs ϵ. On espère néanmoins que le cas de trois supercuspidales de niveau 2 pourrait être accessible, en se ramenant à des questions combinatoires sur les représentations supercuspidales du groupe fini $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}/\varpi)$.

Les vecteurs test ont des applications *globales* à des problèmes concernant les valeurs centrales de fonctions L de produits triples de formes automorphes sur GL_2. Une telle application a été trouvée par Berstein-Reznikov et Michel-Venkatesh [MV] qui utilisent des vecteurs test pour donner des bornes de sous-convexité pour les fonctions L de représentations automorphes sur GL_2 le long de la droite critique. Une autre application potentielle, que nous aimerions explorer, serait de décrire les couples de formes modulaires nouvelles dont le produit est une forme modulaire propre pour les opérateurs de Hecke.

On peut formuler des questions de vecteurs test pour d'autres groupes que GL_2 dans le cadre des conjectures de Gross et Prasad.

Travaux de l'auteur

[1] *Automorphic symbols, p-adic L-functions and ordinary cohomology of Hilbert modular varieties*, disponible sur `http ://people.math.jussieu.fr/~dimitrov/new`, soumis.

[2] avec E. Ghate, *On classical weight one forms in Hida families*, disponible sur `http ://people.math.jussieu.fr/~dimitrov/new`, soumis.

[3] avec L. Nyssen, *Test vectors for trilinear forms when at least one representation is not supercuspidal*, Manuscripta Mathematica, Volume 133, Issue 3-4 (2010), pp. 479-504.

[4] *Cohomologie ℓ-adique des variétés modulaires de Hilbert*, Actes du colloque "Cohomologie l-adique et corps de nombres", CIRM, décembre 2007, Publications Mathématiques de l'Université Franche-Comté Besançon, janvier 2009, 12pp.

[5] *On Ihara's lemma for Hilbert Modular Varieties*, Compositio Mathematica, Volume 145, Issue 5 (2009), 1114-1146.

[6] avec L. Dieulefait, *Explicit determination of images of Galois representations attached to Hilbert modular forms*, J. Number Theory, 117, Issue 2 (2006), pp. 397–405.

[7] *Galois representations modulo p and cohomology of Hilbert modular varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 38, Issue 4 (2005), pp. 505–551.

[8] avec J. Tilouine, *Variétés et formes modulaires de Hilbert arithmétiques pour* $\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$, in Geometric Aspects of Dwork Theory, A. Adolphson, F. Baldassarri, P. Berthelot, N. Katz, and F. Loeser, eds., Walter de Gruyter, 2004, pp. 555-614.

[9] *Compactifications arithmétiques des variétés de Hilbert et formes modulaires de Hilbert pour* $\Gamma_1(\mathfrak{c},\mathfrak{n})$, in Geometric Aspects of Dwork Theory, A. Adolphson, F. Baldassarri, P. Berthelot, N. Katz, and F. Loeser, eds., Walter de Gruyter, 2004, pp. 527-554.

[10] *Valeur critique de la fonction L adjointe d'une forme modulaire de Hilbert et arithmétique du motif correspondant*, Thèse de Doctorat, Université Paris 13, Octobre 2003, 130pp.

Bibliographie

[AS] A. Ash and G. Stevens, *p-Adic deformations of arithmetic cohomology*, preprint.

[BL] B. Balasubramanyam and M. Longo, *Λ-adic modular symbols over totally real fields*, to appear in Commentarii Mathematici Helvetici.

[BR] D. Blasius and J. Rogawski, *Motives for Hilbert Modular Forms*, Invent. Math., 114 (1993), pp. 55–87.

[BK] S. Bloch and K. Kato, *L-functions and Tamagawa numbers of motives*, in The Grothendieck Festschrift, Vol. I, vol. 86 of Progr. Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 333–400.

[B] D. Bump , *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Volume 55, Cambridge University Press, 574pp.

[Bu] K. Buzzard, *Analytic continuation of overconvergent eigenforms*, Journal of the American Math. Society, 16 (2003), pp. 29–55.

[BDJ] K. Buzzard, F. Diamond and F. Jarvis, *On Serre's conjecture for mod ℓ Galois representations over totally real fields*, Duke Math. J., 155, (2010), pp. 105–161.

[BT] K. Buzzard and R. Taylor, *Companion forms and weight* 1 *forms*, Annals of Maths, 149 (1999), pp. 905–919.

[C] H. Carayol, *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 19 (1986).

[Da] A. Dabrowski, *p-adic L-functions of Hilbert modular forms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 44 (1994), pp. 1025–1041.

[De] P. Deligne, *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, in Automorphic forms, representations and L-functions, Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 313–346.

[DFG] F. Diamond, M. Flach, and L.Guo, *The Tamagawa number conjecture of adjoint motives of modular forms*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 37 (2004), pp. 663–727.

[E1] M. Emerton, *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Invent. Math., 164 (2006), pp. 1–84.

[E2] ——, *Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for* $\mathrm{GL}_2/\mathbb{Q}$, preprint.

[EPW] M. Emerton, R. Pollack and T. Weston, *Variation of Iwasawa invariants in Hida families*, Invent. Math., 163 (2006), pp. 523–580.

[Fi] A. Fischman, *On the image of Λ-adic Galois representations*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 52 (2002), no. 2, pp. 351–378.

[FM] J.-M. Fontaine and B. Mazur, *Geometric Galois representations*, in Elliptic Curves, Modular Forms & Fermat's Last Theorem (Hong Kong, 1993), J. Coates and S.-T. Yau, eds., Internat. Press, 1997, pp. 190–227.

[FP-R] J.-M. Fontaine and B. Perrin-Riou, *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L*, in Motives (Seattle, WA, 1991), vol. 55 of Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 599–706.

[Fu] K. Fujiwara, *Galois deformations and arithmetic geometry of Shimura varieties*, in International Congress of Mathematicians. Vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 347–371.

[GV] E. Ghate and V. Vatsal, *On the local behaviour of ordinary Λ-adic representations*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 54 (2004), no. 7, pp. 2143–2162.

[G] R. Greenberg, *Iwasawa theory and p-adic deformations of motives*, in Motives (Seattle, WA, 1991), vol. 55 of Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 193–223.

[GS] R. Greenberg and G. Stevens, *p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms*, Invent. Math., 111 (1993), pp. 407–447.

[GP] B. H. Gross and D. Prasad, *Test vectors for linear forms*, Math. Ann., 291 (1991), pp. 343–355.

[HS] M. Harris and A. J. Scholl, *A note on trilinear forms for reducible representations and Beilinson's conjectures*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), 3 (2001), pp. 93–104.

[H1] H. Hida, *Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math., 85 (1986), pp. 545–613.

[H2] ——, *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 19 (1986), pp. 231–273.

[H3] ——, *On p-adic Hecke algebras for GL_2 over totally real fields*, Ann. of Math. (2), 128 (1988), pp. 295–384.

[H4] ——, *Nearly ordinary Hecke algebras and Galois representations of several variables*, in Algebraic analysis, geometry and number theory, Proceedings of the JAMI Inaugural Conference, 1988, pp. 115–134.

[H5] ——, *On nearly ordinary Hecke algebras for $\mathrm{GL}(2)$ over totally real fields*, in Algebraic number theory, vol. 17 of Adv. Stud. Pure Math., Academic Press, Boston, MA, 1989, pp. 139–169.

[H6] ——, *On the critical values of L-functions of $\mathrm{GL}(2)$ and $\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)$*, Duke Math. J., 74 (1994), pp. 431–529.

[H7] ——, *Control theorems of p-nearly ordinary cohomology groups for $\mathrm{SL}(n)$*, Bull. Soc. Math. France, 123 (1995), pp. 425–475.

[K] M. Kisin, *The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2*, J. Amer. Math. Soc., 22 (2009), pp. 641–690.

[KL] M. Kisin and K. Lai *Overconvergent Hilbert Modular forms*, Amer. J. Math, 127 (2005), pp. 735–783.

[Ki] K. Kitagawa, *On standard p-adic L-functions of families of elliptic cusp forms*, in p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991), vol. 165 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 81–110.

[L] T. Liu, *Lattices in filtered (φ, N)-modules*, preprint.

[Mn] J. I. Manin, *Non-Archimedean integration and p-adic Jacquet-Langlands L-functions*, Uspehi Mat. Nauk, 31 (1976), pp. 5–54.

[Mz] B. Mazur, *An introduction to the deformation theory of Galois representations*, in Modular Forms and Fermat's Last Theorem, G. Cornell, J. Silverman, and G. Stevens, eds., Springer-Verlag, 1997, pp. 243–311.

[Me] L. Merel, *Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres*, Invent. Math., 124 (1996), pp. 437–449.

[MTT] B. Mazur, J. Tate, and J. Teitelbaum, *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math., 84 (1986), pp. 1–48.

[Mo] C. P. Mok, *The exceptional zero conjecture for Hilbert modular forms*, Compos. Math., 145 (2009), pp. 1–55.

[MV] P. Michel and A. Venkatesh, *The subconvexity problem for* GL(2), Publ. Math IHES, 111 (2010), pp. 171–271.

[O] T. Oda, *Periods of Hilbert modular surfaces*, vol. 19 of Progress in Mathematics, Birkhäuser Boston, Mass., 1982.

[Pa] A. Pantchichkine, *Motives over totally real fields and p-adic L-functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 44 (1994), pp. 989–1023.

[Pr] D. Prasad, *Trilinear forms for representations of* GL(2) *and local ϵ-factors*, Compositio Math., 75 (1990), pp. 1–46.

[S] T. Saito, *Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory*, Compos. Math., 145 (2009), pp. 1081–1113.

[Sa] S. Sasaki, *Analytic continuation of overconvergent Hilbert eigenforms*, Compos. Math., 146 (2010), pp. 541-560.

[Ta] R. Taylor, *On Galois representations associated to Hilbert modular forms*, Invent. Math., 98 (1989), pp. 265–280.

[Ti] J. Tilouine, *Nearly ordinary rank four Galois representations and p-adic Siegel modular forms*, Compos. Math., 142 (2006), pp. 1122–1156. With an appendix by Don Blasius.

[TW] R. Taylor and A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math., 141 (1995), pp. 553–572.

[W1] A. Wiles, *On ordinary λ-adic representations associated to modular forms*, Invent. Math., 94 (1988), pp. 529–573.

[W2] ——, *Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. of Math., 141 (1995), pp. 443–551.

Coordonnées :
Mladen Dimitrov
Université Paris 7
UFR de Mathématiques
Site Chevaleret, Case 7012
75205 Paris cedex 13
dimitrov@math.jussieu.fr
http ://people.math.jussieu.fr/~dimitrov/