Compactifications arithmétiques des variétés de Hilbert et formes modulaires de Hilbert pour $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$

Mladen Dimitrov

Soit F un corps de nombres totalement réel de degré d_F, d'anneau des entiers $\mathfrak{o}$, de différente $\mathfrak{d}$ et de discriminant $\Delta_F = \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}(\mathfrak{d})$. On abrégera $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{F/\mathbb{Q}}$.

On se donne un groupe algébrique $D_{/\mathbb{Q}}$, intermédiaire entre $\mathbb{G}_\mathrm{m}$ et $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_\mathrm{m}$, connexe : $\mathbb{G}_\mathrm{m} \hookrightarrow D \hookrightarrow \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_\mathrm{m}$. On définit le groupe algébrique $G^D_{/\mathbb{Q}}$ (resp. $G^*_{/\mathbb{Q}}$) comme le produit fibré de D (resp. $\mathbb{G}_\mathrm{m}$) et de $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2$ au-dessus de $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_\mathrm{m}$. On a le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{SL}_2 \arrow[r, hook] \arrow[d] & G^* \arrow[r, hook] \arrow[d] & G^D \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2 \arrow[d, "\nu"] \\
1 \arrow[r, hook] & \mathbb{G}_\mathrm{m} \arrow[r, hook] & D \arrow[r, hook] & \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_\mathrm{m}
\end{tikzcd} ,$$

où la flèche $\nu : \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_2 \to \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_\mathrm{m}$ est donnée par la norme réduite.

Le sous-groupe de Borel standard de G^D, son radical unipotent et son tore maximal standard sont notés B, U et T, respectivement. On pose $T_1 = T \cap \ker(\nu)$.

Pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R et pour tout groupe algébrique H sur $\mathbb{Q}$, on note H_R le groupe de ses R-points.

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{o}$ premier à Δ_F et ne divisant ni 2, ni 3 et soit $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de F, que l'on peut supposer premier à $\mathfrak{n}$. Alors le groupe de congruences $\Gamma = \Gamma^D_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$, défini dans la partie 3, est sans torsion et l'espace de modules de variétés abéliennes de Hilbert–Blumenthal correspondant $M = M^D_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ est un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schéma, lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$, où $\Delta = \mathrm{N}(\mathfrak{d}\mathfrak{n})$ (voir la partie 4 pour une définition précise de l'espace de modules M).

Cet article décrit les compactifications arithmétiques de M et donne quelques unes de leurs propriétés.

Les principales références sont les articles [11] de M. Rapoport et [2] de C.-L. Chai, où les compactifications toroïdales et minimale sont construites pour le sous-groupe de congruence principal de niveau $\mathrm{N}(\mathfrak{n})$, lorsque $D = \mathbb{G}_\mathrm{m}$. Par ailleurs, Rapoport explique comment on peut obtenir une compactification partielle de M aux pointes non-ramifiées. La contribution principale de ce travail est qu'il fournit les cartes locales servant à compactifier les pointes ramifiées. Une application immédiate est le "principe du q-développement" en ces pointes ramifiées.

Les résultats de cet article sont utilisés dans un article commun avec J. Tilouine [6], où figurent aussi différentes applications aux formes modulaires de Hilbert. En vue de ces applications, il est important de disposer de compactifications toroïdales lisses de M, puisque l'on sait prolonger les fibrés automorphes à celles-ci.

Le groupe auxiliaire D nous permet de traiter simultanément le cas du groupe modulaire de Hilbert et celui de sa version étendue, qui sont d'égale importance et correspondent à $D = \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ et $D = \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, respectivement (voir [1]).

Je remercie tous ceux qui m'ont consacré du temps pour discuter, et en particulier Y. Henrio, qui a eu la gentillesse de m'expliquer le théorème de descente formelle de Rapoport, ainsi que A. Abbès, D. Barsky, G. Chenevier, H. Hida, A. Mokrane, M. Raynaud et E. Urban. Je voudrais exprimer toute ma gratitude à J. Tilouine parce qu'il m'a initié à ce sujet de recherche passionnant et constamment encouragé au cours de la préparation de ce travail. Enfin, je remercie les rapporteurs pour leurs remarques intéressantes.

Nous rappelons d'abord brièvement la construction générale de variétés semi-abéliennes, donnée par D. Mumford dans le cas totalement dégénéré [10]. Nous introduisons ensuite la notion de $(R, \mathfrak{n})$-pointe, version algébrique de la Γ-pointe. Cela nous permet de construire, en suivant [11], les cartes locales, qui seront utilisées pour les compactifications toroïdales arithmétiques.

1 La construction de Mumford

Soit R un anneau excellent, intégralement clos, noethérien, complet pour la topologie I-adique, pour un idéal radiciel $I = \sqrt{I}$. Soit K le corps des fractions de R.

Soit $S = \mathrm{Spec}(R)$, η son point générique et $S_0 = \mathrm{Spec}(R/I)$ le sous-schéma fermé défini par I.

Définition 1.1. Un S-schéma en groupes commutatif, lisse et de type fini G est dit semi-abélien, si ses fibres géométriques sont des extensions d'une variété abélienne par un tore.

Considérons le tore déployé $\widetilde{G} = \mathbb{G}_m^r \times S$ de rang r sur S. Soit $\mathfrak{b}$ un sous-groupe discret polarisable de $\widetilde{G}_\eta$. L'objet de cette section est d'esquisser la construction d'un schéma semi-abélien G/S, comme “quotient” de $\widetilde{G}$ par $\mathfrak{b}$. La stratégie est la suivante :

(i) Construire une “compactification” $\widetilde{G} \hookrightarrow \widetilde{P}$ telle que l'action de $\mathfrak{b}$ s'étende à $\widetilde{P}$ et que $\mathfrak{b}$ agisse librement et discontinument sur $\widetilde{P} \underset{S}{\times} S_0$ (pour la topologie de Zariski).

(ii) Suivre les flèches du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G} \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"] & \widetilde{P} & \widetilde{\mathfrak{P}} \arrow[l, "\text{complétion}"'] \arrow[d, "\text{quotient formel par } \mathfrak{b}"'] \\ G \arrow[r, hook, "\text{ouvert}"] & P & \mathfrak{P} \arrow[l, "\text{algébrisation}"] \end{tikzcd}.$$

(iii) Enfin, montrer que G est semi-abélien sur S, indépendant du choix de $\widetilde{P}$, que G_η est abélien, et que $G_0 = \widetilde{G}_0 = \mathbb{G}_m^r \times S_0$.

Périodes et polarisation. Soit $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}^r$ le groupe des caractères de $\widetilde{G}$. Pour $\alpha \in \mathfrak{a}$, notons $\mathfrak{X}^\alpha \in \mathrm{H}^0(\widetilde{G}, \mathcal{O}_{\widetilde{G}})$ le caractère associé. Alors de manière canonique :

$$\widetilde{G} = \operatorname{Spec}(R[\mathfrak{X}^\alpha; \alpha \in \mathfrak{a}]).$$

Définition 1.2. Un ensemble de *périodes* est un sous-groupe $\mathfrak{b} \subset \widetilde{G}_\eta$ isomorphe à $\mathbb{Z}^r$.

Définition 1.3. Une *polarisation* pour $\mathfrak{b}$ est un homomorphisme $\phi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$ tel que :

(i) $\mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(\beta') = \mathfrak{X}^{\phi(\beta')}(\beta)$, pour tout $\beta, \beta' \in \mathfrak{b}$,

(ii) $\mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(\beta) \in I$, pour tout $\beta \in \mathfrak{b} \setminus \{0\}$.

Lemme 1.4. *Pour tout $\alpha \in \mathfrak{a}$, il existe un entier $n \geq 1$ avec $\mathfrak{X}^{n\phi(\beta)+\alpha}(\beta) \in R$ pour tout $\beta \in \mathfrak{b}$.*

Modèles relativement complets. Étant donné un ensemble de périodes $\mathfrak{b} \subset \widetilde{G}_\eta$ muni d'une polarisation ϕ, Mumford donne la

Définition 1.5. Un *modèle relativement complet* de $\widetilde{G}$, par rapport à $(\mathfrak{b}, \phi)$, est la donné des éléments suivants :

(a) Un schéma intègre $\widetilde{P}$, localement de type fini sur R,

(b) Une immersion ouverte $i : \widetilde{G} \hookrightarrow \widetilde{P}$,

(c) Un faisceau inversible $\widetilde{\mathcal{L}}$ sur $\widetilde{P}$,

(d) Une action du tore $\widetilde{G}$ sur $\widetilde{P}$ et $\widetilde{\mathcal{L}}$, notée $S_g : \widetilde{P} \to \widetilde{P}$ et $S_g^* : \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, pour tout point fonctoriel g de $\widetilde{G}$,

(e) Une action de $\mathfrak{b}$ sur $\widetilde{P}$ et $\widetilde{\mathcal{L}}$, notée $T_\beta : \widetilde{P} \to \widetilde{P}$ et $T_\beta^* : \widetilde{\mathcal{L}} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, pour tout $\beta \in \mathfrak{b}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) Il existe un ouvert $\widetilde{G}$-invariant $U \subset \widetilde{P}$ de type fini sur S et tel que $\widetilde{P} = \bigcup_{\beta\in\mathfrak{b}} T_\beta(U)$.

(ii) Pour toute valuation v sur le corps des fonctions rationnelles sur $\widetilde{G}$ et qui est positive sur R, on a :

$$v \text{ a du centre sur } \widetilde{P} \iff \text{pour tout } \alpha \in \mathfrak{a}, \text{ il existe } \beta \in \mathfrak{b} \text{ avec } v(\mathfrak{X}^\alpha(\beta)\mathfrak{X}^\alpha) \geq 0.$$

(iii) Les actions de $\widetilde{G}$ et $\mathfrak{b}$ sur $\widetilde{P}$ prolongent leurs actions par translation sur $\widetilde{G}_\eta$.

(iv) Les actions de $\widetilde{G}$ et $\mathfrak{b}$ sur $\widetilde{\mathcal{L}}$ vérifient la condition de compatibilité suivante :

$$S_g^* T_\beta^* = \mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(g) T_\beta^* S_g^*, \text{ pour tout } \beta \in \mathfrak{b} \text{ et tout point fonctoriel } g \text{ de } \widetilde{G}.$$

(v) $\widetilde{\mathcal{L}}$ est ample sur $\widetilde{P}$, au sens que les compléments des lieux des zéros des sections globales $\mathrm{H}^0(\widetilde{P}, \widetilde{\mathcal{L}}^{\otimes n})$, $n \geq 1$, forment une base de la topologie de Zariski de $\widetilde{P}$.

Définition 1.6. Une *étoile* Σ de $\mathfrak{a}$ est un sous-ensemble fini de $\mathfrak{a}$ tel que $0 \in \Sigma$, $\Sigma = -\Sigma$ et Σ contient une base de $\mathfrak{a}$.

Soit l'anneau gradué : $\mathcal{R} = \sum_{k=0}^{\infty} K[\mathfrak{X}^\alpha; \alpha \in \mathfrak{a}] \cdot \theta^k$.

On définit une action du groupe $\mathfrak{b}$ sur $\mathcal{R}$ par : $\begin{cases} T_\beta^*(c) = c, \text{ pour } c \in K, \\ T_\beta^*(\mathfrak{X}^\alpha) = \mathfrak{X}^\alpha(\beta)\mathfrak{X}^\alpha, \text{ pour } \alpha \in \mathfrak{a}, \\ T_\beta^*(\theta) = \mathfrak{X}^{\phi(\beta)}(\beta)\mathfrak{X}^{2\phi(\beta)}\theta. \end{cases}$

Définition 1.7. Soit Σ une étoile de $\mathfrak{a}$; on note $R_{\phi,\Sigma}$ le sous anneau de $\mathcal{R}$ engendré sur R par les éléments $T_\beta^*(\mathfrak{X}^\alpha\theta)$ pour $\beta \in \mathfrak{b}$ et $\alpha \in \Sigma$, i.e. :

$$R_{\phi,\Sigma} = R[\mathfrak{X}^{\phi(\beta)+\alpha}(\beta)\mathfrak{X}^{2\phi(\beta)+\alpha}\theta]_{\beta\in\mathfrak{b},\alpha\in\Sigma}.$$

D'après le lemme 1.4 on peut supposer, quitte à remplacer ϕ par $n\phi$, que $R_{\phi,\Sigma} \subset R[\mathfrak{X}^\alpha\theta]_{\alpha\in\mathfrak{a}}$.

On montre alors que $\mathrm{Proj}(R_{\phi,\Sigma})$ est un modèle relativement complet pour $\widetilde{G}$. Comme $R_{\phi,\Sigma}$ est un anneau gradué engendré par ses éléments de degré 1, $\mathrm{Proj}(R_{\phi,\Sigma})$ est muni d'un faisceau très ample inversible canonique, qui est le $\mathcal{O}(1)$.

On obtient ainsi le :

Théorème 1.8 (Mumford [10]). *Soit $\widetilde{G}$ un tore déployé sur S, $\mathfrak{b} \subset \widetilde{G}_\eta$ un groupe de périodes et $\phi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$ une polarisation. Alors, pour toute étoile Σ de $\mathfrak{a}$, quitte à remplacer ϕ par $n\phi$ ($n \in \mathbb{Z}$, $n \gg 0$), $\widetilde{P} = \mathrm{Proj}(R_{\phi,\Sigma})$, muni de son faisceau canonique $\mathcal{O}(1)$, est un modèle relativement complet pour $\widetilde{G}$ sur S, par rapport à $(\mathfrak{b}, 2\phi)$.*

On remarque que $\widetilde{G}_\eta = \widetilde{P}_\eta$.

La construction du quotient procède en deux temps : Mumford forme d'abord le quotient $\mathfrak{P}$ du complété formel de $\widetilde{P}$ le long du bord, par $\mathfrak{b}$. Ce quotient est un schéma formel projectif et de type fini, donc s'algébrise en un schéma projectif de type fini noté P.

Considérons l'ouvert $\bigcup_{\beta\in\mathfrak{b}} T_\beta(\widetilde{G}) \subset \widetilde{P}$. Soit $\widetilde{B} = \widetilde{P} - \bigcup_{\beta\in\mathfrak{b}} T_\beta(\widetilde{G})$ le sous-schéma réduit, et $\mathfrak{B}$ le quotient par $\mathfrak{b}$ de son complété formel. C'est la complétion formelle d'un sous-schéma réduit $B \subset P$. Posons $G = P \setminus B$. Par construction les complétions I-adiques de G et $\widetilde{G}$ sont canoniquement isomorphes.

Théorème 1.9 (Mumford [10]). *Le schéma G/S est semi-abélien, G_η est une variété abélienne et G_0 est un tore déployé de rang r. Le schéma G/S ne dépend que du tore $\widetilde{G}$ et du groupe de périodes $\mathfrak{b}$, et il est indépendant de la fonction de polarisation ϕ et du modèle relativement complet $\widetilde{P}$. La construction de G/S est fonctorielle en $\widetilde{G}/S$ et en $\mathfrak{b}$.*

2 Construction de VAHB dégénérantes

On applique la construction de Mumford pour construire des variétés abéliennes de Hilbert–Blumenthal dégénérantes. Afin d'éviter des répétitions avec la partie 2 de [6], nous n'allons donner la définition d'une variété abélienne de Hilbert–Blumenthal que dans le cas où le discriminant Δ_F du corps F est inversible.

Définition 2.1. Une variété abélienne de Hilbert–Blumenthal (abrégé VAHB) sur un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta_F}]$-schéma S est la donnée d'un schéma abélien $f : A \to S$ de dimension relative d_F et d'une injection $\iota : \mathfrak{o} \hookrightarrow \mathrm{End}(A/S)$ tels que le faisceau $\underline{\omega} = f_* \Omega^1_{A/S}$ soit localement libre de rang 1 sur $\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_S$, pour la topologie de Zariski.

Pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{f}$ de F on pose $\mathfrak{f}^* = \mathfrak{f}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$. On a un accouplement parfait $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}} : \mathfrak{f} \times \mathfrak{f}^* \to \mathbb{Z}$.

Soit X un idéal fractionnaire de F, muni de sa positivité $X_+ = X \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$.

L'anneau de base $\overline{S}_\sigma$. Soit $R = \mathbb{Z}[q^\xi; \xi \in X]$.

Soit $S = \mathrm{Spec}(R) = \mathbb{G}_m \otimes X^*$ le tore de groupe de caractères X.

Soit Σ un éventail complet lisse de X^*_+ et soit $S \hookrightarrow S_\Sigma$, l'immersion torique associée. On rappelle qu'elle est obtenue en recollant, pour $\sigma \in \Sigma$, les immersions toriques affines $S \hookrightarrow S_\sigma = \mathrm{Spec}(R_\sigma)$, où $R_\sigma = \mathbb{Z}[q^\xi; \xi \in X \cap \check{\sigma}]$. Soit $S^\wedge_\sigma$ le complété de S_σ le long de $S^\infty_\sigma := S_\sigma \backslash S$ et $S^\wedge_\Sigma$ le complété de S_Σ le long de $S^\infty_\Sigma := S_\Sigma \backslash S$.

Pour écrire les choses plus explicitement, donnons nous une base $\xi^*_1,\ldots,\xi^*_r$ de σ que l'on complète en une base $\xi^*_1,\ldots,\xi^*_d$ de X^*. Soit $\xi_1,\ldots,\xi_d$ la base duale de X et posons $Z_i = q^{\xi_i}$. Alors $R_\sigma = \mathbb{Z}[Z_1, \ldots, Z_r, Z^\pm_{r+1} Z^\pm_d]$ et S^∞_σ est le diviseur à croisements normaux de S_σ défini par l'équation $Z_1 \ldots Z_r = 0$.

On a $S^\wedge_\sigma = \mathrm{Spf}(R^\wedge_\sigma)$, où $R^\wedge_\sigma$ est le complété de R_σ en l'idéal principal radiciel $(Z_1 \ldots Z_r)$.

Pour décrire ce complété, on décompose tout $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ en $(\underline{n}', \underline{n}'') \in \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^{d-r}$. Disons qu'une série de Laurent formelle $\sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\underline{n}} Z_1^{n_1} \ldots Z_d^{n_d}$ à coefficients $c_{\underline{n}} \in \mathbb{Z}$ est $(Z_1 \ldots Z_r)$-entière si

(i) pour tout $\underline{n}''$, $c_{\underline{n}',\underline{n}''} = 0$, si $\underline{n}' \notin \mathbb{N}^r$,

(ii) pour tout $H \geq 1$ on a $c_{\underline{n}',\underline{n}''} = 0$, pour presque tout $(\underline{n}', \underline{n}'') \notin [H, \infty[^r \times \mathbb{Z}^{d-r}$.

Le complété $R^\wedge_\sigma$ s'identifie alors à l'ensemble des séries $\sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^d} c_{\underline{n}} Z_1^{n_1} \ldots Z_d^{n_d}$ qui sont $(Z_1 \ldots Z_r)$-entières. C'est un anneau normal.

On voit ainsi que $R^\wedge_\sigma$ est aussi le complété de R_σ par rapport à la topologie suivante :

$$q^{\xi_i} \to 0 \iff \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi_i \xi^*) \to +\infty, \quad \forall \xi^* \in \sigma. \tag{1}$$

L'anneau de base sur lequel nous effectuons la construction de Mumford ici est $R^\wedge_{\underline{\sigma}}$. Soit $\overline{S}_\sigma = \mathrm{Spec}(R^\wedge_\sigma)$; posons $\overline{S}^0_\sigma = S \underset{S_\sigma}{\times} \overline{S}_\sigma = \mathrm{Spec}(R^\wedge_\sigma \otimes_{R_\sigma} R)$. C'est l'ouvert de $\overline{S}_\sigma$ obtenu en rendant inversible q^ξ pour tout élément ξ de $X \cap \check{\sigma}^0$ (où $\check{\sigma}^0$ désigne l'intérieur du cône dual $\check{\sigma}$ de σ). Soit $\overline{S}_{\sigma 0} := \overline{S}_\sigma \setminus \overline{S}^0_\sigma$ muni de la structure réduite. Si $\sigma' \subset \sigma$, on a une flèche $\overline{S}_{\sigma'} \to \overline{S}_\sigma$.

Le tore $\widetilde{G}$. Soit $\mathfrak{a}$ ($= P^*$ dans les notations de Rapoport [11]) un idéal du corps de nombres totalement réel F et soit $\widetilde{G} := (\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^*) \times \overline{S}_\sigma$ le $\overline{S}_\sigma$-tore de groupe des caractères $\mathfrak{a}$. Explicitement : $\widetilde{G} = \mathrm{Spec}\left(R^\wedge_\sigma[\mathfrak{X}^\alpha; \alpha \in \mathfrak{a}]\right)$.

L'ensemble des périodes $\mathfrak{b}$. Soit $\mathfrak{b}$ ($= N$ dans les notations de Rapoport [11]) un idéal fractionnaire de F, tel que

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1} = \mathfrak{c} \text{ et } \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset X.$$

Pour chaque $\beta \in \mathfrak{b}$ on définit un $\overline{S}^0_\sigma$-point de $\widetilde{G}$, par le morphisme

$$R^\wedge_\sigma[\mathfrak{X}^\alpha; \alpha \in \mathfrak{a}] \to R^\wedge_\sigma \otimes_{R_\sigma} R, \quad \mathfrak{X}^\alpha \mapsto q^{\alpha\beta}.$$

Ceci définit un homomorphisme $\mathfrak{o}$-équivariant de $\overline{S}^0_\sigma$-schémas en groupes $q : \mathfrak{b} \to \mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^* = \widetilde{G}$, (où $\mathfrak{b}$ désigne le schéma en groupes constant).

La polarisation $\boldsymbol{\phi}$. Se donner une polarisation $\mathfrak{o}$-linéaire $\phi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$ (voir la définition 1.3) revient à se donner un élément $[\phi] \in \mathfrak{c}_+ = \mathfrak{c} \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$.

La construction de Mumford donne un schéma semi-abélien G_σ sur $\overline{S}_\sigma$.

Propriétés du schéma semi-abélien $\boldsymbol{G_\sigma}$.

– La restriction de G_σ à $\overline{S}^0_\sigma$ est une VAHB, notée G^0_σ.

– Tout élément $[\phi] \in \mathfrak{c}$ donne une flèche naturelle $\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^* \to \mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{b}^*$, d'où, par fonctorialité de la construction, une flèche symétrique ϕ de la variété abélienne $G^0_\sigma = (\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{a}^*)/q(\mathfrak{b})$ vers sa duale $(G^0_\sigma)^t = (\mathbb{G}_m \otimes \mathfrak{b}^*)/q(\mathfrak{a})$. Si $[\phi] \in \mathfrak{c}_+$, alors ϕ est une polarisation.

– Par le lemme du serpent, appliqué à la multiplication par $\mathfrak{n}$ dans $\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes \mathfrak{a}^*$, on trouve la $\mathfrak{n}$-torsion de G^0_σ (qui est le sous-schéma en groupes réduit, intersection des noyaux des multiplications par les éléments de $\mathfrak{n}$) au milieu de la suite exacte

$$1 \to (\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \to G^0_\sigma[\mathfrak{n}] \to \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \to 0. \tag{2}$$

– La restriction de G_σ à $\overline{S}_{\sigma 0}$ est égale au tore $(\mathbb{G}_\mathrm{m} \otimes \mathfrak{a}^*) \times \overline{S}_{\sigma 0}$.

– La construction est fonctorielle en les $\sigma \in \Sigma$ et compatible avec l'action de $\mathfrak{o}^\times$, i.e. pour tout $\sigma' \subset \sigma$ et pour tout $u \in \mathfrak{o}^\times$ on a des diagrammes cartésiens :

$$\begin{tikzcd} G_{\sigma'} \arrow[r] \arrow[d] & G_\sigma \arrow[d] \\ \overline{S}_{\sigma'} \arrow[r] & \overline{S}_\sigma \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\sigma \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & G_{u^2\sigma} \arrow[d] \\ \overline{S}_\sigma \arrow[r, "\sim"] & \overline{S}_{u^2\sigma} \end{tikzcd} .$$

3 $\boldsymbol{R}$-pointes et $(\boldsymbol{R}, \mathfrak{n})$-pointes

Pour tout idéal $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{o}$ on note $\mathfrak{o}^\times_\mathfrak{f}$ le sous-groupe de $\mathfrak{o}^\times$ formé des unités congrues à 1 modulo $\mathfrak{f}$. On note $\mathfrak{o}^\times_+$ le groupe des unités totalement positives de $\mathfrak{o}$.

Pour tout $\mathfrak{o}$-réseau L de F^2 notons $G^+(L)$ le stabilisateur de L dans $G^D_{\mathbb{Q}+}$ (pour l'action à gauche donnée par $\gamma \cdot l = l\gamma^{-1}$, pour tout $\gamma \in G^D_\mathbb{Q}$ et $l \in L$). On a

$$G^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) = \left\{ \gamma \in \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{c}^* \\ \mathfrak{c}\mathfrak{d} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} \;\middle|\; \nu(\gamma) \in \mathfrak{o}^\times_+ \cap D_\mathbb{Q} \right\}.$$

$$\text{Posons } \Gamma = \Gamma^D_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*) \;\middle|\; c \in \mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{n}, \;\; d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, \mathfrak{n}) \right\}.$$

Cette partie étudie la combinatoire des pointes d'une variété modulaire de Hilbert–Blumenthal en niveau $\Gamma^D_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ et servira à la construction de cartes locales pour les compactifications toroïdales. Cette étude a été déjà effectuée par Rapoport en niveau $\Gamma^D(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ et en niveau $\Gamma^D_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$ pour une pointe non-ramifiée, lorsque $\mathfrak{n}$ est un entier naturel et

$D = \mathbb{G}_\mathrm{m}$ (voir [11]). Par ailleurs, lorsque $F = \mathbb{Q}$, l'étude est faite par Deligne et Rapoport [5], en niveau $\Gamma(\mathfrak{n})$, et par Katz et Mazur [8] en général.

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal fractionnaire de F, muni de sa de positivité $\mathfrak{c}_+ = \mathfrak{c} \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$.

Les objets combinatoires considérés dans cette partie sont inspirés par les structures de niveau des VAHB : une VAHB $\mathfrak{c}$-polarisée complexe admet une uniformisation de la forme $F \otimes \mathbb{C}/L$, où L est un $\mathfrak{o}$-réseau de F^2 tel que $\wedge^2_\mathfrak{o} L = \mathfrak{c}^*$. Or, un tel réseau s'écrit $L = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*$, avec $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux fractionnaires de F tels que $\mathfrak{a}^*\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^*$. La $\mu_\mathfrak{n}$-structure de niveau sur une telle VAHB est donnée alors par un homomorphisme injectif de $\mathfrak{o}$-modules $\beta : \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1} \hookrightarrow \mathfrak{n}^{-1}L/L$. Par ailleurs tout $\mathfrak{o}$-module projectif de rang 2 est isomorphe à un $\mathfrak{o}$-réseau de F^2. La définition suivante est une variante de celle donnée par Rapoport dans le cas $D = \mathbb{G}_\mathrm{m}$.

Définition 3.1. Une R-pointe $\mathcal{C}$ (resp. une classe d'isomorphisme de R-pointes) est une classe d'équivalence de sextuplets $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, L, i, j, \lambda)$, où

(i) $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux fractionnaires de F tels que $\mathfrak{a}^*\mathfrak{b} = \mathfrak{c}^*$,

(ii) L est un $\mathfrak{o}$-réseau de F^2 tel que l'on a une suite exacte $\mathfrak{o}$-modules

$$0 \to \mathfrak{a}^* \xrightarrow{i} L \xrightarrow{j} \mathfrak{b} \to 0,$$

(iii) $\lambda : \wedge^2_\mathfrak{o} L \to \mathfrak{c}^*$ est un isomorphisme $\mathfrak{o}$-linéaire (polarisation),

pour la relation d'équivalence suivante : $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, L, i, j, \lambda)$ et $(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', L', i', j', \lambda')$ sont équivalents, si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ (resp. $\mathfrak{a} = \xi\mathfrak{a}'$ et $\mathfrak{b} = \xi\mathfrak{b}'$ avec $\xi \in F$) et s'il existe un diagramme commutatif de $\mathfrak{o}$-modules :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{a}^* \arrow[r, "i"] \arrow[d] & L \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \mathfrak{b} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{a}'^* \arrow[r, "i'"] & L' \arrow[r, "j'"] & \mathfrak{b}' \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes et tel que l'isomorphisme $\wedge^2_\mathfrak{o} L \cong \wedge^2_\mathfrak{o} L'$ (déduit de $L \cong L'$) induise, via λ et λ', un automorphisme de $\mathfrak{c}^*$, donné par un élément de $\mathfrak{o}^\times_{D+} := \mathfrak{o}^\times_+ \cap D_\mathbb{Q}$.

L'application qui à une R-pointe $\mathcal{C} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, L, i, j, \lambda)$ associe l'idéal $\mathfrak{b}$ est une bijection entre l'ensemble des R-pointes et l'ensemble $\mathcal{I}_F$ des idéaux fractionnaires de F. En effet, par (i) la donnée de $\mathfrak{b}$ détermine $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, et deux suites exactes courtes (ii), correspondant au même idéal $\mathfrak{b}$, sont équivalentes, car toutes les deux sont scindées.

La notion d'isomorphisme de R-pointes correspond alors à celle d'homothétie des idéaux. On obtient par passage au quotient un isomorphisme entre les classes d'isomorphisme de R-pointes et le groupe Cl_F des classes d'idéaux de F.

Une R-pointe est déterminée par son $\mathfrak{o}$-réseau L de F^2 (en effet, la donnée d'un tel réseau détermine les idéaux $\mathfrak{a}^* := L \cap (\{0\} \times F)$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}\mathfrak{a}^{-1}$, et donc la R-pointe $\mathcal{C}$, à équivalence près). Le groupe $G^\mathfrak{o}_\mathbb{Q} := \{\gamma \in G^D_\mathbb{Q} \mid \nu(\gamma) \in \mathfrak{o}^\times_+\}$ agit transitivement sur ces réseaux. Le stabilisateur du réseau $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*$ dans $G^\mathfrak{o}_\mathbb{Q}$ est égal à $G^+(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{c}^*)$. De plus, deux réseaux L et L' donnent la même R-pointe $\mathcal{C}$, si et seulement s'ils sont dans la même $T_\mathbb{Z}U_\mathbb{Q}$-orbite. Le diagramme commutatif suivant, traduit la correspondance entre les R-pointes et les pointes classiques dans $\mathbb{P}^1(F)$ pour le sous-groupe de congruence $G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}_F \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & R\text{−pointes} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{o}}/G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\backslash F^2-\{0\}/\mathfrak{o}^\times \arrow[d] \\
\mathrm{Cl}_F \arrow[r, "\sim"] & R\text{−pointes/isom.} \arrow[r, "\sim"] & B_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{Q}}^{D}/G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*) \arrow[r, "\sim"] & G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\backslash\mathbb{P}^1(F),
\end{tikzcd}$$

où pour tout $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in G_{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{o}}$ la double classe $B_{\mathbb{Q}}\gamma^{-1}G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)$ s'envoie d'une part sur la pointe classique $G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\gamma\infty$ et d'autre part sur l'idéal $\mathfrak{b}=a\mathfrak{o}+c\mathfrak{c}^*$ (voir [6] Lemme 1.7).

Définition 3.2. (i) Une $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ (resp. une classe d'isomorphisme de $(R,\mathfrak{n})$-pointes) est la donnée d'une classe d'équivalence de paires formées d'un sextuplet $(\mathfrak{a},\mathfrak{b},L,i,j,\lambda)$ (comme dans la définition 3.1) et d'un morphisme injectif de $\mathfrak{o}$-modules

$$\beta:\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1}\hookrightarrow\mathfrak{n}^{-1}L/L,$$

pour la relation d'équivalence suivante :

$\mathcal{C}$ est équivalent à $\mathcal{C}'$, s'il existe un isomorphisme de $\mathfrak{o}$-modules $L\cong L'$ induisant une égalité (resp. un isomorphisme) des R-pointes sous-jacentes et dont la réduction modulo $\mathfrak{n}$ rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{n}^{-1}L/L \arrow[rr, "\sim"] & & \mathfrak{n}^{-1}L'/L' \\
& \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1}\,. \arrow[ul, hook, "\beta"] \arrow[ur, hook, "\beta'"'] &
\end{tikzcd}$$

On associe à $\mathcal{C}$ l'idéal fractionnaire $\mathfrak{b}'\supset\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}=j(\mathrm{im}(\beta))$.

(ii) Une $(R,\mathfrak{n})$-pointe est dite *non-ramifiée* lorsque la flèche $\beta:\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1}\hookrightarrow\mathfrak{n}^{-1}L/L$ se factorise par la flèche naturelle $\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*\hookrightarrow\mathfrak{n}^{-1}L/L$ (ou si de manière équivalente $\mathfrak{b}'=\mathfrak{b}$).

(iii) Soit une $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ et soit n l'exposant du groupe $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$. Une $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}'$ est dite appartenir à la même $(R,\mathfrak{n})$-*composante* que $\mathcal{C}$ (resp. à une $(R,\mathfrak{n})$-composante isomorphe), s'il existe $\overline{a}\in(\mathbb{Z}/n)^\times$ et un isomorphisme de $\mathfrak{o}$-modules $L\cong L'$ induisant une égalité (resp. un isomorphisme) des R-pointes sous-jacentes et dont la réduction ψ modulo $\mathfrak{n}$ fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{n}^{-1}L/L \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] & \mathfrak{n}^{-1}L/L \arrow[r, "\sim", "\psi"'] & \mathfrak{n}^{-1}L'/L' \\
& \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1}\,, \arrow[ul, hook, "\beta"] \arrow[ur, hook, "\beta'"'] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche φ est un automorphisme $\mathfrak{o}$-linéaire de $\mathfrak{n}^{-1}L/L$, induisant l'identité sur $\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*$ et la multiplication par $\overline{a}$ sur $\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b}$.

Soit y_0 tel que $\mathfrak{o}=\mathfrak{n}+y_0\mathfrak{c}$. On munit la R-pointe $L_0=\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*$ de la structure de niveau $\beta_0:\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1}\xrightarrow{\cdot y_0}\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{c}^*/\mathfrak{c}^*\hookrightarrow\mathfrak{n}^{-1}L_0/L_0$. Le groupe $G_{\mathbb{Q}}^{\mathfrak{o}}$ agit transitivement sur ces réseaux munis de structures de niveau et le stabilisateur de (L_0, β_0) est Γ. De plus, deux réseaux L et L' donnent la même R-pointe $\mathcal{C}$, si et seulement s'ils sont dans la même $T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}$-orbite. D'où le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (R,\mathfrak{n})\text{–pointes} & \xrightarrow{\sim} & T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}} \setminus G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}}/\,\Gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ (R,\mathfrak{n})\text{–pointes/isom.} & \xrightarrow{\sim} & B_{\mathbb{Q}} \setminus G^{D}_{\mathbb{Q}}/\,\Gamma\ . \end{array}$$

Proposition 3.3. *Soit une $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$, donnée par $T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}\gamma^{-1}\Gamma$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}}$. Alors,*

(i) *L'idéal $\mathfrak{b}$, correspondant à la R-pointe sous-jacente à $\mathcal{C}$ est donné par $a\mathfrak{o} + c\mathfrak{c}^*$ et sa classe ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la pointe $\mathcal{C}$.*

Quitte à changer γ, en le multipliant par un élément de $U_{\mathbb{Q}}$, ce qui ne change pas sa classe double, on suppose que $\gamma \in G^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Q}} \cap \begin{pmatrix} \mathfrak{b} & (\mathfrak{b}\mathfrak{c})^* \\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} & \mathfrak{b}^{-1} \end{pmatrix}$. Sous cette hypothèse :

(ii) *La structure de niveau de $\mathcal{C}$ est donnée par $\beta : \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1} \xrightarrow{(y_0c,\, y_0d)} \mathfrak{n}^{-1}L/L$, où $L = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*$, avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$.*

(iii) *L'idéal $\mathfrak{b}'$ de la définition* 3.2(i) *est contenu dans $\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}$ et sa classe ne dépend que de la classe d'isomorphisme de la pointe $\mathcal{C}$. De plus $\mathfrak{b}' = a\mathfrak{o} + c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*$. La pointe $\mathcal{C}$ est non-ramifiée, si et seulement si, $c \in \mathfrak{n}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$.*

(iv) *Le groupe d'automorphismes de la $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ est égal à $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}}$. La suite exacte $1 \to U \to B \to T \to 1$, donne une suite exacte :*

$$0 \to X^* \to \gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}} \to \mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}} \to 1,$$

où $X = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}} = \{(u, \epsilon) \in \mathfrak{o}^{\times} \times \mathfrak{o}^{\times}_{D+} \mid u - 1 \in \mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1},\quad u\epsilon - 1 \in \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}\}$. En particulier, on a $\mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C},1} := \mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}} \cap T_1 = \{u \in \mathfrak{o}^{\times} \mid u \in (1 + \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}) \cap (1 + \mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1})\}$.

(v) *L'ensemble des $(R, \mathfrak{n})$-pointes est fibré au-dessus de $\mathcal{I}_F$. La fibre de l'idéal $\mathfrak{b}$ est isomorphe à $(G^+(\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*) \cap T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}) \setminus G^+(\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*)/\gamma^{-1}\Gamma\gamma$, où $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $L = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^*$. Elle s'identifie avec l'ensemble :*

$$(\mathfrak{n}^{-1}L/L)_{\mathrm{prim}}\Big/\left\{\begin{pmatrix} u\epsilon & \xi^* \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \;\Big|\; u \in \mathfrak{o}^{\times}, \epsilon \in \mathfrak{o}^{\times}_{D+}, \xi^* \in (\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*\right\},$$

où $(\mathfrak{n}^{-1}L/L)_{\mathrm{prim}}$ désigne l'ensemble des vecteurs primitifs du $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$-module $\mathfrak{n}^{-1}L/L$, et son cardinal est égal à $\sum_{\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b} \supset \mathfrak{b}' \supset \mathfrak{b}} \#(\mathfrak{o}/\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1})^{\times} \#(\mathfrak{o}/\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1})^{\times}/[(\mathfrak{o}^{\times} \times \mathfrak{o}^{\times}_{D+}) : \mathfrak{o}^{\times}_{\mathcal{C}}]$.

(vi) *L'ensemble des $(R, \mathfrak{n})$-composantes est fibré au-dessus de $\mathcal{I}_F$. La fibre de l'idéal $\mathfrak{b}$ s'identifie avec l'ensemble :*

$$(\mathfrak{n}^{-1}L/L)_{\mathrm{prim}}\Big/\left\{\begin{pmatrix} \overline{a}u\epsilon & \xi^* \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \;\Big|\; u \in \mathfrak{o}^{\times}, \epsilon \in \mathfrak{o}^{\times}_{D+}, \overline{a} \in (\mathbb{Z}/n)^{\times}, \xi^* \in (\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*\right\}$$

qui est de cardinal $\sum_{\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}\supset\mathfrak{b}'\supset\mathfrak{b}} \#(\mathfrak{o}/\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1})^\times \#(\mathfrak{o}/\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1})^\times / \#(\mathbb{Z}/n)^\times [(\mathfrak{o}^\times \times \mathfrak{o}_{D+}^\times) : \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times]$, *où* n *est égal à l'exposant du groupe* $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$. *De plus*

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \left\{(u,\epsilon) \in \mathfrak{o}^\times \times \mathfrak{o}_{D+}^\times \mid u-1 \in \mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}, \quad u\epsilon \in (\mathbb{Z}/n)^\times + \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}\right\},$$

$$\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times = \left\{u \in \mathfrak{o}^\times \mid u \in (1+\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}) \cap ((\mathbb{Z}/n)^\times + \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1})\right\}.$$

Démonstration. (i) La R-pointe sous-jacente à $\mathcal{C}$ correspond à la classe double $T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}\gamma^{-1}G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)$ et donc à la $G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)$-pointe $\gamma\infty = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$. Par le diagramme qui précède la définition 3.2 la R-pointe $\mathcal{C}$ correspond à l'idéal $\mathfrak{b} = a\mathfrak{o} + c\mathfrak{c}^*$.

(ii), (iii) La structure de niveau β de L est obtenue en faisant agir γ^{-1} sur la structure de niveau β_0 de L_0. Or, par le choix que nous avons fait de γ, on a $L_0\gamma = \mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^* = L$ et donc $\beta : \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1} \xrightarrow{(cy_0,dy_0)} \mathfrak{b}'/\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^* \hookrightarrow \mathfrak{n}^{-1}L/L$. La pointe est donc non-ramifiée si, et seulement, si $cy_0\mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1} \subset \mathfrak{b}$, i.e. $c \in \mathfrak{n}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$. Enfin $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} + cy_0\mathfrak{d}^{-1}\mathfrak{n}^{-1} = a\mathfrak{o} + c\mathfrak{c}^* + c\mathfrak{c}^*\mathfrak{n}^{-1} = a\mathfrak{o} + c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^*$. L'indépendance des classes de $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ découle du lemme 1.7 de [6] .

(iv) Pour le calcul du groupe d'automorphismes $\gamma^{-1}\Gamma\gamma \cap B_{\mathbb{Q}}$ de la $(R,\mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$, on remarque qu'il est formé de matrices $\begin{pmatrix} u\epsilon & \xi_{u,\epsilon}^* \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$, avec $u \in \mathfrak{o}^\times$, $\epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times$, $\xi^* \in (\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*$ (c'est la forme générale d'un automorphisme de la R-pointe sous-jacente) qui respectent en plus la structure de niveau β. Ceci équivaut au système

$$\begin{cases} (u\epsilon-1)c \in \mathfrak{n}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \\ (u-1)d - \epsilon^{-1}\xi_{u,\epsilon}^* c \in \mathfrak{n}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{a}^* = \mathfrak{n}\mathfrak{b}^{-1}. \end{cases} \tag{3}$$

En posant $u = \epsilon = 1$ on retrouve que X^* est formé des $\xi^* \in c^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{b}^{-1} \cap (\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^* = (\mathfrak{c}\mathfrak{b})^*((c(\mathfrak{c}\mathfrak{n}^*)^{-1} \cap \mathfrak{b}^{-1}) = (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^*$, i.e. $X = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$.

Pour le calcul de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ on remarque que la première condition de (3) équivaut à $u\epsilon - 1 \in c^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{b}(c(\mathfrak{c}\mathfrak{n})^{*-1} \cap \mathfrak{b}^{-1}) = \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}$. La deuxième condition équivaut à $u - 1 \in d^{-1}(\mathfrak{n}\mathfrak{b}^{-1} + c(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*) = (d\mathfrak{b})^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}$. Par ailleurs $u - 1 \in \mathfrak{o} \subset c^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{d} = (c(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^*)^{-1}\mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}$. Comme $(d\mathfrak{b})^{-1} \cap (c(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^*)^{-1} = (d\mathfrak{b} + c(\mathfrak{b}\mathfrak{c})^*)^{-1} = \mathfrak{o}$, par le choix de γ, on en déduit que la deuxième condition de (3) équivaut à $u - 1 \in \mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}$.

Notons que pour tout $u \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$, $\xi_{u,\epsilon}^* \in c^{-1}(\mathfrak{n}\mathfrak{b}^{-1} + d(\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1} \cap \mathfrak{n}\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1})) \subset (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^* + d\mathfrak{b}((\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^* \cap (\mathfrak{n}\mathfrak{c}\mathfrak{b}'^2)^*) \subset (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^* + (\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^* \cap (\mathfrak{n}\mathfrak{c}\mathfrak{b}'^2)^*$, et ce dernier est un idéal inclus (parfois strictement !) dans $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*$ (voir l'exemple à la fin de l'article).

(v), (vi) Comme γ transforme $\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*$ en $\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*$ et $\gamma^{-1}G^+(\mathfrak{o}\oplus\mathfrak{c}^*)\gamma = G^+(\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*)$, la fibre de l'idéal $\mathfrak{b}$ est isomorphe à $(G^+(\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*) \cap T_{\mathbb{Z}}U_{\mathbb{Q}}) \setminus G^+(\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*)/\gamma^{-1}\Gamma\gamma$, L'ensemble $G^+(\mathfrak{b}\oplus\mathfrak{a}^*)/\gamma^{-1}\Gamma\gamma$ s'identifie avec celui des vecteurs primitifs du $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$-module $\mathfrak{n}^{-1}L/L$. Le calcul du cardinal de la fibre se fait en analysant la condition sous laquelle deux vecteurs primitifs correspondent à la même (R,n)-pointe. La démonstration du (vi) est tout a fait analogue.

Comme par définition $n\mathfrak{o} \subset \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1} \subset \mathfrak{o}$, l'ensemble $(\mathbb{Z}/n)^\times + \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}$ est bien une réunion de classes de $\mathfrak{o}$, modulo l'idéal entier $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}$ Notons que $[\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times : \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times]$ divise $\#(\mathbb{Z}/n)^\times$ et le quotient représente le nombre de (R, n)-pointes dans la (R, n)-composante $\overline{\mathcal{C}}$. $\square$

Exemple 3.4. On pose $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$ (polarisation principale) et $G = G^*$ ($\mathfrak{o}_{D+}^\times = \{1\}$).

(i) Si $F = \mathbb{Q}$, $\mathfrak{n} = p\,\mathbb{Z}$, avec p un nombre premier, on a $p-1$ $(R, \mathfrak{n})$-pointes, au-dessus de la R-pointe ∞ ($\mathfrak{b} = \mathbb{Z}$), dont

– $(p-1)/2$ non-ramifiées, avec $\mathfrak{b}' = \mathbb{Z}$ et $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \{1\}$. Chacune de ces pointes est seule dans sa $(R, \mathfrak{n})$-composante.

– $(p-1)/2$ ramifiées, avec $\mathfrak{b}' = p^{-1}\mathbb{Z}$ et $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \{\pm 1\} \supset \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \{1\}$, contenues dans une seule $(R, \mathfrak{n})$-composante.

(ii) Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^2$, avec $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathfrak{o}$ de degré résiduel 1 ($\mathrm{N}(\mathfrak{p}) = p$, avec p un nombre premier), on a 3 types de $(R, \mathfrak{n})$-pointes, au-dessus de la R-pointe ∞ ($\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$) :

– si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{o}$, on a $n = 1$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times$, et donc on a $p(p-1)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times]$ pointes non-ramifiées, chacune seule dans sa $(R, \mathfrak{n})$-composante.

– si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{p}^{-1}$, on a $n = p$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$, et donc on a $(p-1)^2/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times]$ pointes peu ramifiées, partagées par groupes de $(p-1)$, en $(p-1)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times]$ $(R, \mathfrak{n})$-composantes.

– si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{p}^{-2}$, on a $n = p^2$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \mathfrak{o}^\times$, $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times$, et donc on a $p(p-1)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times]$ pointes très ramifiées, contenus dans une seule $(R, \mathfrak{n})$-composante.

(iii) Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathfrak{o}$ de degré résiduel 2 ($\mathrm{N}(\mathfrak{p}) = p^2$, avec p un nombre premier), on a 2 types de $(R, \mathfrak{n})$-pointes, au-dessus de la R-pointe ∞ ($\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$) :

– si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{o}$, on a $n = 1$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$, et donc on a $(p^2-1)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times]$ pointes non-ramifiées, chacune seule dans sa $(R, \mathfrak{n})$-composante.

– si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{p}^{-1}$, on a $n = p$, $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$ $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times = \{u \in \mathfrak{o}^\times \mid u^p - u \in \mathfrak{p}\}$, et donc on a $(p^2-1)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times]$ pointes peu ramifiées, partagées par groupes de $(p-1)/[\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times : \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times]$, en $(p+1)/[\mathfrak{o}^\times : \mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^\times]$ $(R, \mathfrak{n})$-composantes.

4 Construction des cartes locales

Soit $\mathfrak{c}$ un idéal de F, muni de sa positivité naturelle $\mathfrak{c}_+ = \mathfrak{c} \cap (F \otimes \mathbb{R})_+$. Posons $\Delta = \Delta_F\,\mathrm{N}(\mathfrak{n}) = \mathrm{N}(\mathfrak{d}\mathfrak{n})$. Nous identifions $T_1 \times D$ et T par $(u, \epsilon) \mapsto \begin{pmatrix} u\epsilon & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$.

On on considère le foncteur contravariant $\underline{\mathcal{M}}^1$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}$) de la catégorie des $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schémas vers celle des ensembles, qui à un schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de quadruplets $(A, \iota, \lambda, \alpha)/S$ (resp. $(A, \iota, \overline{\lambda}, \alpha)/S$), où (A, ι) est une VAHB (voir [6] Déf.2.2), λ est une $\mathfrak{c}$-polarisation sur A (resp. $\overline{\lambda}$ est une classe de $\mathfrak{c}$-polarisations ; voir [6] Déf.2.3), et $\alpha : (\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1) \hookrightarrow A[\mathfrak{n}]$ est une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau (voir [6] Déf.2.5).

Le foncteur $\underline{\mathcal{M}}^1$ est représentable par un $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-schéma quasi-projectif, normal, géométriquement connexe M^1 de dimension d_F, qui est lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ et muni d'un quadruplet universel $(\mathcal{A}, \iota, \lambda, \alpha)$ (voir [6] Thm.4.1).

Le foncteur $\underline{\mathcal{M}}$ admet un schéma de modules grossier M sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$ quasi-projectif, normal, géométriquement connexe et lisse au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$ (voir [6] Cor.4.2).

Le schéma M est le quotient de M^1 par le groupe fini $\mathfrak{o}_{D+}^{\times}/(\mathfrak{o}_{D+}^{\times} \cap \mathfrak{o}_{\mathfrak{n}}^{\times 2})$ qui agit proprement et librement par $[\epsilon] : (\mathcal{A}, \iota, \lambda, \alpha)/S \mapsto (\mathcal{A}, \iota, \epsilon\lambda, \alpha)/S$.

Le but de cette partie est de munir les VAHB construites dans la partie 2 de différentes $\mu_{\mathfrak{n}}$-structures de niveau, et ainsi fournir les cartes locales servant à compactifier la variété modulaire de Hilbert M.

A chaque $(R, \mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$, on peut associer par la Déf.3.2 et la Prop.3.3 des idéaux $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$ et $X = \mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}'$, un entier n égal à l'exposant du groupe $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$, des groupes d'unités $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^{\times}$, $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^{\times}$, $\mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}},1}^{\times}$ et des sous-groupes $H_{\mathcal{C}} = \mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}}}^{\times}/\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^{\times}$, $H_{\mathcal{C},1} = \mathfrak{o}_{\overline{\mathcal{C}},1}^{\times}/\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^{\times}$ du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ (ces objets sont *a priori* associés à une $(R, \mathfrak{n})$-pointe, mais sont constants au sein d'une $(R, \mathfrak{n})$-composante).

Soit une $(R, \mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ et considérons le tore $S = S_{\mathcal{C}} = \mathbf{G}_m \otimes X^*$. Soit $\Sigma^{\mathcal{C}}$ un éventail complet de X_+^*. Soit $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$. La construction de la partie précédente, appliquée à $(X, \mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, nous donne alors un schéma semi-abélien $G_\sigma/\overline{S}_\sigma$, muni d'une action de $\mathfrak{o}$ et dont la restriction à $G_\sigma^0/\overline{S}_\sigma^0$ est une VAHB $\mathfrak{c}$-polarisée.

En appliquant une deuxième fois la construction de la partie précédente, cette fois à $(X, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}')$, on obtient un schéma semi-abélien $G'_\sigma/\overline{S}_\sigma$, muni d'une action de $\mathfrak{o}$ et dont la restriction $G'^0_\sigma/\overline{S}_\sigma^0$ est une VAHB $\mathfrak{c}' = \mathfrak{a}\mathfrak{b}'^{-1}$-polarisée. Par fonctorialité on a une flèche $G_\sigma \to G'_\sigma$, dont la restriction $G_\sigma^0 \to G'^0_\sigma$ est une isogénie. On en déduit la suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{b}'/\mathfrak{b} \xrightarrow{q} G_\sigma^0[\mathfrak{n}] \to G'^0_\sigma[\mathfrak{n}] \to 1. \tag{4}$$

Considérons d'abord le cas où $\mathcal{C}$ est non-ramifiée. On a alors $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ et donc $X = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. La variété abélienne G_σ^0 associée à une $(R, \mathfrak{n})$-composante non-ramifiée est naturellement munie d'une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau $(\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1) \cong (\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \hookrightarrow G_\sigma^0[\mathfrak{n}]$, où la première flèche vient de l'isomorphisme $\beta : \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1} \cong \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*$ et la deuxième du (2).

Passons maintenant au cas où $\mathcal{C}$ est ramifiée. Afin de munir G_σ^0 d'une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau, on doit :

– choisir un relèvement de $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$ dans $\mathrm{im}(\beta)$ (appelé *uniformisation* de $\mathcal{C}$),

– se placer dans ce cas au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}])$, où $\zeta_{\mathcal{C}}$ désigne une racine de l'unité d'ordre égal à l'exposant n du groupe abélien $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$.

Au-dessus de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}])$ on a un isomorphisme canonique $\mathfrak{b}^*/\mathfrak{b}'^* \cong (\mathfrak{b}'/\mathfrak{b})(1)$, d'où une $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau sur G_σ^0 :

$$(\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1) \hookrightarrow (\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \times (\mathfrak{b}^*/\mathfrak{b}'^*)(1) \cong (\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \times \mathfrak{b}'/\mathfrak{b} \xhookrightarrow{(2)(4)} G_\sigma^0[\mathfrak{n}],$$

où la première inclusion vient de la flèche $\beta : \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}/\mathfrak{d}^{-1} \hookrightarrow \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^* \times \mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$.

Proposition 4.1. (i) *Pour toute $(R, \mathfrak{n})$-composante uniformisée $\mathcal{C}$ et pour tout cône $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$ la construction ci-dessus donne un carré cartésien :*

$$\begin{tikzcd} G_\sigma^0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}]) \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[d] & \\ \overline{S}_\sigma^0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}]) \arrow[r] & M^1 \arrow[r] & M . \end{tikzcd}$$

(ii) *Changer l'uniformisation de la pointe* $\mathcal{C}$ *revient à se donner un élément* $x \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^*/(\mathfrak{a}\mathfrak{b}')^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}, \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{a}^*/\mathfrak{a}^*)$ *et correspond donc à l'automorphisme de* $\overline{S}_\sigma^0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}])$ *qui envoie* q^ξ *sur* $\zeta_{\mathcal{C}}^{n\,\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi x)} q^\xi$ $(\xi \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}')$.

(iii) *Soient* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *deux* $(R, \mathfrak{n})$*-composantes uniformisées et soient deux cônes* $\sigma_i \subset X^*_{i,\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$. *Supposons qu'il existe*

– *un isomorphisme de* $(R, \mathfrak{n})$*-composantes* $\mathcal{C}_1 \cong \mathcal{C}_2$ *(d'où* $\xi \in F^\times$ *tel que* $\mathfrak{a}_2^* = \xi\mathfrak{a}_1^*$, $\mathfrak{b}_2 = \xi^{-1}\mathfrak{b}_1$ *et* $X_2^* = \xi^2 X_1^*$*) induisant sur* $\mathfrak{c}^*$ *(via les polarisations de* L *et* L'*), la multiplication par une unité* $\epsilon \in \mathfrak{o}_{D+}^\times$,

– *des éléments* $(u, \epsilon) \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}_1}^\times = \mathfrak{o}_{\mathcal{C}_2}^\times$ *et* $h \in H_{\mathcal{C}}$*, tels que* $\sigma_2 = u^2\epsilon\xi^2\sigma_1$ *et* $\zeta_{\mathcal{C}_2} = \zeta_{\mathcal{C}_1}^h$.

Alors, on a un isomorphisme $\overline{S}_{\sigma_1}^0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}_1}]) \cong \overline{S}_{\sigma_2}^0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}_2}])$ *qui complète les deux flèches* $\overline{S}_{\sigma_i}^0 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}_i}]) \to M$ $(i = 1, 2)$ *du* (i) *en un triangle commutatif.*

Le (i) et (ii) découlent de ce qui précède. Le (iii) utilise la fonctorialité de la construction de G_σ^0 en σ et sa compatibilité avec l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ (voir fin de la partie 2 et la Prop.3.3(iv)). □

Avant de décrire la construction des compactifications toroïdales arithmétiques, on doit la préparer. C'est l'objet des deux parties suivantes.

5 Un théorème de descente formelle de Rapoport

La construction d'une compactification toroïdale peut être vue comme l'ajout d'un bord à M. On a un schéma formel de type fini candidat pour ce bord, à savoir l'analogue algébrique de :

$$\mathfrak{X}^{\mathrm{an}} = \coprod_{\text{pointes } \mathcal{C}/\sim} \left(\mathbb{C}^\times \otimes (\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^*\right)^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}} / \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times.$$

Le but de cette partie est de donner un critère abstrait, trouvé par Rapoport [11], pour résoudre le problème de "Descente Formelle", en l'occurrence, le problème d'existence et unicité du schéma recollement Y d'un ouvert Y^0 et d'un schéma formel $\mathfrak{X} : Y^0 \hookrightarrow Y \leftarrow \mathfrak{X}$. Il repose en partie sur un critère d'immersion ouverte de Rapoport dont on rappellera l'énoncé.

Le problème de Descente Formelle sera en fait d'abord posé dans la catégorie des espaces algébriques. On verra dans la partie 7 que les conditions d'application du critère sont satisfaites dans notre cas.

Dans cette partie V désignera un anneau de valuation discrète complet, de corps des fractions K et de corps résiduel k. S désigne un V-schéma.

Soit Aff $/S$ la catégorie des S-schémas affines, munie de la topologie étale. Un faisceau d'ensembles sur Aff $/S$ s'appelle un S-espace.

Définition 5.1. Une relation d'équivalence étale sur un S-schéma U_1 est donnée par une immersion fermée quasi-compacte $U_2 \to U_1 \times_S U_1$ de S-schémas dont les deux projections sont étales et qui définit une relation d'équivalence : pour tout $Y \in \mathrm{Aff}/S$, $U_2(Y) \to U_1(Y) \times_{S(Y)} U_1(Y)$ est une relation d'équivalence.

Un *S-espace algébrique* est un S-espace qui est quotient d'un schéma U_1, appelé un atlas étale, par une relation d'équivalence étale.

L'ensemble Alg/S des S-espaces algébriques muni des flèches de S-espaces forme une catégorie. On définit de même pour un schéma formel $S^\wedge$ la catégorie des $S^\wedge$-espaces algébriques formels, notée $\mathrm{Form}/S^\wedge$.

Définition 5.2. Soit $f : \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ un morphisme dans $\mathrm{Form}/S^\wedge$. On dit que f est un *éclatement admissible* de $\mathfrak{X}$ si f est un éclatement $\mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ dans $\mathrm{Form}/S^\wedge$, par rapport à un idéal qui contient une puissance de l'idéal de définition de $\mathfrak{X}$.

La catégorie des espaces rigides Rig/S est la catégorie localisée de Form/S, par rapport aux éclatements admissibles.

Définition 5.3. Un *épaississement* de (K, V) est un couple $(R, R^{(0)})$ tel que :

– R est un anneau local artinien de corps résiduel K. On note R_V l'image réciproque de V dans R.

– $R^{(0)} \subset R_V \subset R$ est un sous-anneau noethérien tel que le morphisme $R^{(0)} \to V$ soit surjectif et la localisation de $R^{(0)}$ au point générique de V soit égale à R (c'est à dire R est le localisé de $R^{(0)}$ en $J = \ker(R^{(0)} \to V)$).

Soit $\widetilde{\pi}$ un élément de $R^{(0)}$ qui se projette sur une uniformisante de V. Pour tout $i \geq 1$ on pose $R^{(i)} = R^{(0)}[\frac{J}{\widetilde{\pi}^i}]$. Alors $R^{(0)} \subset R^{(1)} \subset \cdots \subset R_V$ et $\bigcup_i R^{(i)} = R_V$.

On a $\mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(K) = \mathrm{Spf}(V)_{\mathrm{rig}}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(R) := \mathrm{Spf}(R^{(0)})_{\mathrm{rig}}$ ($= \mathrm{Spf}(R^{(i)})_{\mathrm{rig}}$), car $\mathrm{Spf}(R^{(i)})$ est obtenu par éclatement (admissible) de $\mathrm{Spf}(R^{(0)})$, par rapport à l'idéal $(\widetilde{\pi}^i) + J$ (car J est nilpotent).

Exemple 5.4. Soit l'anneau local artinien $R = K[t]/(t^2)$. Le sous-anneau $R_V = V + K \cdot t$ n'est pas noethérien. Considérons le sous-anneau noethérien $R^{(0)} = V[t]/(t^2)$. Alors $(R, R^{(0)})$ est un épaississement de (K, V). On a $R^{(i)} = V + V \cdot \frac{t}{\widetilde{\pi}^i}$ et donc $\bigcup_i R^{(i)} = R_V$.

A toute flèche $f_{\mathrm{rig}} : \mathfrak{X}_{\mathrm{rig}} \to \mathfrak{Y}_{\mathrm{rig}}$ on peut associer un modèle formel $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, défini à éclatement admissible près.

Définition 5.5. f_{rig} est une *immersion ouverte*, s'il existe un modèle formel f qui est une immersion ouverte.

M. Rapoport a démontré le critère d'immersion ouverte suivant, qui est utilisé pour démontrer le résultat de recollement abstrait que l'on a en vue.

Théorème 5.6 (Théorème 3.15 de [11]). *f_{rig} est une immersion ouverte, si et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i)$_{\mathrm{rig}}$ *Pour tout corps K, discrètement valué, l'application* $\mathrm{Hom}(\mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(K), \mathfrak{X}_{\mathrm{rig}}) \xrightarrow{f_{\mathrm{rig}*}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(K), \mathfrak{Y}_{\mathrm{rig}})$ *est injective.*

$(\mathrm{ii})_{\mathrm{rig}}$ *Pour tout épaississement* $(R, R^{(0)})$ *de* (K, V) *on peut compléter de façon unique le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(K) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X}_{\mathrm{rig}} \arrow[d] \\ \mathrm{Sp}_{\mathrm{rig}}(R) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathfrak{Y}_{\mathrm{rig}} . \end{tikzcd}$$

Remarque 5.7. L'anneau V étant principal, il n'admet pas d'éclatements admissibles. La condition $(\mathrm{i})_{\mathrm{rig}}$ peut s'écrire donc $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spf}(V), \mathfrak{X}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Spf}(V), \mathfrak{Y})$, alors que le diagramme dans la condition $(\mathrm{ii})_{\mathrm{rig}}$ devient (pour i assez grand) :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spf}(V) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ \mathrm{Spf}(R^{(0)}) & \mathrm{Spf}(R^{(i)}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \mathfrak{Y} . \end{tikzcd}$$

Soit S un schéma affine, de type fini sur le spectre d'un corps ou d'un anneau de Dedekind excellent (pour les applications aux compactifications toroïdales, il suffit de prendre S de type fini sur $\mathbb{Z}$).

Soit A un anneau noethérien complet pour la topologie I-adique, définie par un idéal $I \subset A$. Soit $\mathfrak{U} = \mathrm{Spf}(A)$ le schéma formel affine correspondant. Posons $\overline{U} = \mathrm{Spec}(A)$, $\overline{U}_0 = \mathrm{Spec}(A/I) =$ l'*âme* de $\mathfrak{U}$ et $\overline{U}^0 = \overline{U} \setminus \overline{U}_0$.

Lemme 5.8 (EGA III.5). *Soit Y un espace algébrique de type fini sur S et $Y_0 \subset Y$ un sous-espace fermé. On suppose que $\overline{U} = \mathrm{Spec}(A)$ est un S-schéma et on se donne un S-morphisme formel adique $\mathfrak{f} : \mathfrak{U} \to Y|_{Y_0}$.*

Alors, il existe un unique morphisme $f : \overline{U} \to Y$ dont le complété formel est $\mathfrak{f}$.

Définition 5.9. Un morphisme $g^0 : \mathrm{Spec}(K) \to \overline{U}^0$ sera dit *permis*, s'il vient (via le lemme 5.8) d'un morphisme formel de type fini $\mathfrak{g} : \mathrm{Spf}(V) \to \mathfrak{U}$.

Plus généralement (si $\overline{U}$ est un S-schéma), un morphisme $f^0 : \overline{U}^0 \to Y^0$ dans un espace algébrique de type fini sur S sera dit *permis*, s'il existe une immersion ouverte de Y^0 dans un S-espace algébrique propre Y, telle que : pour tout morphisme permis $\mathrm{Spec}(K) \to \overline{U}^0$, l'unique extension à $\mathrm{Spec}(V)$ du morphisme composé $\mathrm{Spec}(K) \to Y$, envoie le point spécial dans $Y \setminus Y^0$.

Un morphisme f^0, provenant par restriction d'un morphisme $f : U \to Y$, est permis, s'il existe un morphisme formel $\mathfrak{f} : \mathfrak{U} \to \mathfrak{Y} = Y|_{Y_0}$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U} \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[d] & \mathfrak{Y} \arrow[d] \\ \overline{U} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ \overline{U}^0 \arrow[r, "f^0"] & Y^0 . \end{tikzcd}$$

En d'autres termes, un morphisme est permis s'il "envoie le bord sur le bord".

Définition 5.10. Soit $\mathfrak{X}$ un S-espace algébrique formel, séparé et de type fini. Un *découpage* de $\mathfrak{X}$ est la donnée :

– d'un atlas affine $\mathfrak{U}_2 = \mathrm{Spf}(A_2) \rightrightarrows \mathfrak{U}_1 = \mathrm{Spf}(A_1) \to \mathfrak{X}$, et

– d'un espace algébrique Y^0 de type fini sur S, tel que les deux composés suivants soient égaux : $\overline{U}_2^0 \rightrightarrows \overline{U}_1^0 \overset{f^0}{\to} Y^0$, où $\overline{U}_1 = \mathrm{Spec}(A_1)$ et $\overline{U}_2 = \mathrm{Spec}(A_2)$ et les flèches $\overline{U}_2 \rightrightarrows \overline{U}_1$ viennent, via le lemme 5.8, des flèches $\mathfrak{U}_2 \rightrightarrows \mathfrak{U}_1$.

Le découpage est dit *effectif*, s'il existe un S-espace algébrique de type fini Y, une immersion ouverte $j : Y^0 \hookrightarrow Y$ et un isomorphisme $\varphi : \mathfrak{X} \overset{\sim}{\to} \mathfrak{Y}$, où $\mathfrak{Y}$ est le complété formel de Y le long de $Y \setminus Y^0$, tels que le morphisme $f : \overline{U}_1 \to Y$, venant (via le lemme 5.8) du morphisme $\mathfrak{f} : \mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{X} \overset{\sim}{\to} \mathfrak{Y}$, induise $f^0 : \overline{U}_1^0 \to Y^0$ sur $\overline{U}_1^0 \subset \overline{U}_1$.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{U}_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \mathfrak{U}_1 \arrow[r, "\mathfrak{f}"] \arrow[d] & \mathfrak{X} \cong \mathfrak{Y} \arrow[d] \\
\overline{U}_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \overline{U}_1 \arrow[r, "f"] & Y \\
\overline{U}_2^0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, hook] & \overline{U}_1^0 \arrow[r, "f^0"] \arrow[u, hook] & Y^0 \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Théorème 5.11 (Théorème 3.5 de [11])). *Soit un découpage. On suppose :*

– *$\overline{U}_1^0$ est schématiquement dense dans $\overline{U}_1$ (i.e. $\mathcal{O}_{\overline{U}_1} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\overline{U}_1^0}$).*

– *Y^0 est compactifiable (i.e. il existe une S-immersion ouverte $Y^0 \hookrightarrow Y^*$ avec Y^* propre sur S).*

– *Le morphisme $f^0 : \overline{U}_1^0 \to Y^0$ est permis.*

– *Pour tout anneau de valuation discrète complet V, de corps des fractions K :*

$(\mathrm{i}')_{\mathrm{rig}}$ *la suite $\overline{U}_2^0(K)_{\mathrm{permis}} \rightrightarrows \overline{U}_1^0(K)_{\mathrm{permis}} \to Y^0(K)_{\mathrm{permis}}$ est exacte, et*

$(\mathrm{ii}')_{\mathrm{rig}}$ *pour tout épaississement $(R, R^{(0)})$ de (K, V) on peut compléter de façon unique le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "\text{permis}"] \arrow[d] & \overline{U}_1^0 \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(R) \arrow[r, "\text{permis}"] \arrow[ur, dashed] & Y^0 .
\end{tikzcd}$$

Alors le découpage est effectif.

6 La construction de Raynaud

Pour pouvoir vérifier les conditions $(\mathrm{i}')_{\mathrm{rig}}$ et $(\mathrm{ii}')_{\mathrm{rig}}$ ci-dessus dans la situation où l'ouvert Y^0 est l'espace de modules M^1 et le schéma formel $\mathfrak{X}$ est celui donné par les cartes locales de la proposition 4.1, on a besoin de la construction suivante (donnée par Raynaud dans

[12] et reprise par Rapoport dans le cas d'une VAHB [11]). Il est à noter que l'on a besoin de cette construction non seulement sur un corps mais aussi sur un épaississement artinien, auquel cas l'argument donné par Raynaud reste valable.

Soit V un anneau de valuation discrète complet de corps des fractions K, et soit $(R, R^{(0)})$ un épaississement de (K, V).

Définition 6.1. Une variété abélienne A sur R (resp. sur K) est dite à réduction semi-stable (déployée) s'il existe un schéma en groupes lisse sur $R^{(i)}$, pour un certain $i \geq 0$, (resp. sur V), prolongeant A et dont la fibre spéciale est une extension d'une variété abélienne par un tore (déployé).

Pour des raisons de dimension, si une VAHB sur R (ou sur K) est à mauvaise réduction semi-stable déployée, alors la fibre spéciale est un tore déployé. Dans ce cas la description rigide-analytique de Raynaud devient :

Théorème 6.2 (Raynaud). *Soit A une VAHB sur R (ou sur K) à mauvaise réduction semi-stable déployée. Alors :*

$$A_{\mathrm{rig}} = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)_{\mathrm{rig}}/\mathfrak{b}_{\mathrm{rig}},$$

où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux de F. De plus :

– on a une suite exacte $0 \to (\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \to A[\mathfrak{n}] \to \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \to 0$,

– la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to \mathrm{Val(K)} \cong \mathbb{Z}\quad (\alpha, \beta) \mapsto \mathrm{val}(\mathfrak{X}^\alpha(\beta))$ vérifie $\langle a\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, a\beta\rangle$ pour tout $a \in \mathfrak{o}$, et donc définit un unique élément $\xi^* \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^*$, à $\mathbb{Q}_+^\times$ près et à l'action de $\mathfrak{o}^\times$ près,

– le cône positif des polarisations sur A, $\mathcal{P}(A) \subset \mathrm{Sym}_{\mathfrak{o}}(A, A^t) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ est obtenu comme produit de l'unique positivité sur $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ pour laquelle $\xi^* > 0$ et de la positivité naturelle sur $\mathfrak{b}^{-2}$.

7 Compactifications toroïdales arithmétiques

Construction des compactifications toroïdales.

Définition 7.1. Un *éventail Γ-admissible* $\Sigma = (\Sigma^{\mathcal{C}})_{\mathcal{C}}$ est la donnée pour chaque $(R, \mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ d'un éventail complet $\Sigma^{\mathcal{C}}$ de X_+^*, stable par $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ et contenant un nombre fini d'éléments modulo cette action, de sorte que les données soient compatibles aux isomorphismes de $(R, \mathfrak{n})$-composantes $\mathcal{C} \cong \mathcal{C}'$.

Voici l'analogue du résultat principal de l'article [11] dans le cas de groupe de niveau Γ (on rappelle que Γ est sans torsion).

Théorème 7.2. *Soit $\Sigma = \{\Sigma^{\mathcal{C}}\}_{\mathcal{C}}$ un éventail Γ-admissible.*

(i) *Il existe une immersion ouverte $j : M^1 \hookrightarrow M^1_\Sigma$ de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$*-schémas et un isomorphisme de schémas formels*

$$\varphi : \coprod_{(R,\mathfrak{n})-\text{composantes}/\sim} \left(S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}\right) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C},1}}) \xrightarrow{\sim} M^{1\wedge}_\Sigma,$$

(où $M_\Sigma^{1\wedge}$ est le complété formel de M_Σ^1 le long de sa partie à l'infini), tels que pour toute $(R,\mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ et pour tout $\sigma\in\Sigma^{\mathcal{C}}$ on a la propriété suivante : l'image réciproque de la VAHB universelle sur M^1 par le morphisme $\overline{S}_\sigma\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])\to M_\Sigma^1$ (déduit par le lemme 5.8 *du morphisme formel $S_\sigma^\wedge\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])\to M_\Sigma^{1\wedge}$ construit à l'aide de φ), soit la VAHB $\mathfrak{c}$-polarisée avec $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau $G_\sigma^0\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$ sur $\overline{S}_\sigma^0\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$ construite dans la proposition* 4.1(i). *Le couple (j,φ) est unique, à unique isomorphisme près.*

(ii) *Il existe une immersion ouverte $j: M\hookrightarrow M_\Sigma$ de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$*-schémas et un isomorphisme de schémas formels*

$$\varphi:\coprod_{(R,\mathfrak{n})-\text{composantes}/\sim}\big(S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^\wedge/\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times\big)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C}}})\xrightarrow{\sim}M_\Sigma^\wedge.$$

Démonstration. (i) Il y a un nombre fini de $(R,\mathfrak{n})$-composantes $\mathcal{C}$ modulo isomorphisme. Soit $\{\sigma_i^{\mathcal{C}}\}$ un ensemble fini de représentants des cônes de l'éventail $\Sigma^{\mathcal{C}}$, modulo l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times$.

Considérons le schéma formel affine $\mathfrak{U}_1:=\coprod_{\mathcal{C}/\sim}\coprod_i S_{\sigma_i^{\mathcal{C}}}^\wedge\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$. Il est de type fini sur $\mathbb{Z}$ et muni d'un morphisme étale (“immersions toroïdales” et quotient étale par le groupe $H_{\mathcal{C},1}$) dans $\mathfrak{X}:=\coprod_{\mathcal{C}/\sim}\big(S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}^\wedge/\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times\big)\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C},1}})$.

Posons $\overline{U}_1=\coprod_{\mathcal{C}/\sim}\coprod_i\overline{S}_{\sigma_i^{\mathcal{C}}}\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$.

D'après la proposition 4.1(i) on a un morphisme $f^0:\overline{U}_1^0\to M^1$, qui est permis, car toute variété abélienne obtenue comme image réciproque, par un morphisme permis $\mathrm{Spec}(K)\to\overline{S}^0_{\sigma_i^{\mathcal{C}}}\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$, de la variété abélienne $G_\sigma^0\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}}])$ est à mauvaise réduction d'après la partie 2.

Posons $\mathfrak{U}_2:=\mathfrak{U}_1\times_{\mathfrak{X}}\mathfrak{U}_1=\mathrm{Spf}(A_2)$ et $\overline{U}_2=\mathrm{Spec}(A_2)$. Les deux flèches composées $\overline{U}_2^0\rightrightarrows\overline{U}_1^0\to M^1$ sont égales par compatibilité de la construction de Mumford avec les inclusions $\sigma'\subset\sigma$, avec l'action de $\mathfrak{o}_{\mathcal{C},1}^\times$ et avec l'action de $H_{\mathcal{C},1}$ (appliquer la proposition 4.1(iii) dans le cas $D=\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$).

Vérifions la condition $(\mathrm{i}')_{\mathrm{rig}}$ du théorème 5.11 :

Soient $g_1^0,g_2^0:\mathrm{Spec}(K)\to\overline{U}_1^0$ deux morphismes permis avec $f^0\circ g_1^0=f^0\circ g_2^0$.

Chaque morphisme g_j^0 se factorise par un certain $\overline{S}^0_{\sigma_j}\times\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})},\zeta_{\mathcal{C}_j}])$, où σ_j désigne un des $\sigma_i^{\mathcal{C}_j}$ et détermine ainsi :

– une $(R,\mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}_j$ (à laquelle sont attachés des objets $\mathfrak{a}_j,\mathfrak{b}_j,\mathfrak{b}'_j,X_j,\beta_j$),

– une racine de l'unité $\zeta_{\mathcal{C}}^{(j)}\in K$, d'ordre l'exposant n_j du groupe $\mathfrak{b}'_j/\mathfrak{b}_j$,

– un cône σ_j de $\Sigma^{\mathcal{C}_j}$ et un morphisme $\psi_j:R_{\sigma_j}^\wedge\to V$, d'où un élément $\xi_j^*\in\sigma_j\cap X_j^*$, déterminé par la propriété suivante : pour tout $\xi\in\check{\sigma}_j\cap X_j$ on a $\mathrm{val}(\psi_j(q^\xi))=\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi\xi_j^*)$.

Le morphisme permis $f^0\circ g_j^0$ fournit une VAHB A sur K munie d'une $\mathfrak{c}$-polarisation et $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau, à mauvaise réduction semi-stable déployée.

L'uniformisation de Raynaud–Tate de la VAHB A, décrite dans la partie 6, donne alors :

– deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, tels que $A_{\mathrm{rig}} = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)_{\mathrm{rig}}/\mathfrak{b}_{\mathrm{rig}}$ et $\mathfrak{c} = \mathrm{Sym}_{\mathfrak{o}}(A, A^t) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ (ceci nous donne une R-pointe $\mathcal{C}$, bien définie modulo isomorphisme). Comme la construction de Mumford et celle de Raynaud sont inverses l'une à l'autre (i.e. le 1-motif associé par Raynaud à la VAHB sur K construite par Mumford est le 1-motif du départ), les R-pointes sous-jacentes de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont isomorphes à $\mathcal{C}$.

– une suite exacte : $0 \to (\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \to A[\mathfrak{n}] \to \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \to 0$. Ainsi, la $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau sur A détermine-t-elle bien une une $(R, \mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ au-dessus de la R-pointe $\mathcal{C}$ et une racine de l'unité $\zeta_{\mathcal{C}}$. De nouveau par compatibilité de la construction de Mumford et celle de Raynaud on déduit que $\zeta_{\mathcal{C}_1}$ et $\zeta_{\mathcal{C}_2}$ sont conjuguées sous $H_{\mathcal{C},1}$ et que les $(R, \mathfrak{n})$-composantes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont isomorphes, et donc égales, car elles vivent dans un ensemble de représentants modulo isomorphisme.

– un élément $\xi^* \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^*_+$ bien défini modulo $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$. Un dernière fois par compatibilité des constructions de Mumford et de Raynaud, on trouve que $\xi_1^* \in \sigma_1$ et $\xi_2^* \in \sigma_2$ sont dans la même $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$-orbite. Par conséquent $\xi_1^* = \xi_2^*$ et, par exemple $\sigma_1 \subset \sigma_2$.

On en déduit qu'il existe un morphisme permis $h^0 : \mathrm{Spec}(K) \to \overline{U}_2^0$ tel que $g_1^0 = p_1^0 \circ h^0$ et $g_2^0 = p_2^0 \circ h^0$, ce qui termine la vérification du $(\mathrm{i}')_{\mathrm{rig}}$.

Vérifions la condition $(\mathrm{ii}')_{\mathrm{rig}}$ du théorème 5.11 :

Les morphismes permis $\mathrm{Spec}(K) \to \overline{U}_1^0$ et $\mathrm{Spec}(R) \to M^1$ nous donnent deux VAHB A/K et A'/R à mauvaise réduction, avec $A \cong A' \times_R K$. Comme dans la vérification de $(\mathrm{i}')_{\mathrm{rig}}$, la flèche $\mathrm{Spec}(K) \to \overline{U}_1^0$ détermine les des donnés combinatoires $\mathcal{C} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, X, \beta), \zeta_{\mathcal{C}}, \xi^* \in X^*$. Par la théorie de Raynaud–Tate A et A' admettent des uniformisation rigides analytiques $A_{\mathrm{rig}} = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)_{\mathrm{rig}}/\mathfrak{b}_{\mathrm{rig}}$ (compatibilité entre la construction de Mumford et celle de Raynaud) et $A'_{\mathrm{rig}} = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}'^*)_{\mathrm{rig}}/\mathfrak{b}'_{\mathrm{rig}}$. Comme $A_{\mathrm{rig}} = A'_{\mathrm{rig}} \times_R K$, on en déduit que l'on peut prendre $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, $\zeta_{\mathcal{C}} = \zeta_{\mathcal{C}'}$ et $\xi^* = \xi'^*$, d'où le $(\mathrm{ii}')_{\mathrm{rig}}$.

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le théorème 5.11 qui nous donne le couple cherché (j, φ), dont on admet l'unicité.

(ii) Comme $\Sigma^{\mathcal{C}}$ est stable par $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$ (et non-seulement par $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$), le groupe fini $\mathfrak{o}^\times_{D+}/(\mathfrak{o}^\times_{D+} \cap \mathfrak{o}^{\times 2}_{\mathfrak{n}})$ du revêtement galoisien étale $M^1 \to M$ agit proprement et librement sur M^1_Σ et la construction du (i) passe au quotient. La flèche $M^1_\Sigma \to M_\Sigma$ est encore étale. $\square$

Remarque 7.3. Soit $\Sigma = (\Sigma^{\mathfrak{b}})_{\mathfrak{b} \in \mathcal{I}_F}$, où pour tout idéal $\mathfrak{b}$, $\Sigma^{\mathfrak{b}}$ est un éventail $\mathfrak{o}^\times$-admissible de $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*_+$. On aurait pu tenter de définir M_Σ comme la normalisation dans M de la compactification de Rapoport $M(\mathfrak{c})_\Sigma$ de l'espace de modules $M(\mathfrak{c})$. Le problème est que le schéma M_Σ ainsi défini n'est jamais lisse. En effet, pour compactifier chaque $(R, \mathfrak{n})$-pointe $\mathcal{C}$ qui est au-dessus de la R-pointe correspondant à $\mathfrak{b}$ on utilise le même éventail $\Sigma^{\mathfrak{b}}$. Or, si $\mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1} \neq n\mathfrak{o}$ ($n \in \mathbb{Z}$), $\Sigma^{\mathfrak{b}}$ ne peut pas être un éventail lisse pour $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}^2)^*_+$ et $(\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{b}')^*_+$ simultanément.

Propriétés des compactifications toroïdales. Dans la suite, pour alléger les notations, nous écrirons $\overline{M}$ à la place de M_Σ, en gardant en tête la dépendance du système d'éventails Σ.

Corollaire 7.4. *Localement pour la topologie étale sur* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$, $j : M \hookrightarrow \overline{M}$ *est isomorphe à* $S_{\mathcal{C}} \hookrightarrow S_\sigma$ *pour un certain couple* $\mathcal{C}, \sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$.

En particulier, pour tout cône $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}} \setminus \{0\}$, *et tout corps algébriquement clos* k *de caractéristique* p *ne divisant pas* $\mathrm{N}(\mathfrak{n})$, *l'ensemble des* k*-points de la strate* $M(\sigma)$ *de* $\overline{M}$ *s'identifie à celui des* k*-points de la strate fermée* $S(\sigma)$ *de l'immersion torique affine* $S \hookrightarrow S_\sigma$.

Ceci résulte du fait que $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ opère librement sur l'ensemble des strates non-ouvertes de $S_{\mathcal{C}} \hookrightarrow S_{\Sigma^{\mathcal{C}}}$, et donc localement pour la topologie étale $S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$ (et donc $\overline{M}^\wedge$) est isomorphe à $S^\wedge_\sigma$, pour un certain $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$.

Corollaire 7.5. *Quitte à raffiner l'éventail* Σ, *on obtient un schéma* $\overline{M}$ *qui est lisse au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])$.

Proposition 7.6. *Il existe un unique schéma en groupes semi-abélien* $\overline{f} : \mathfrak{G} \to \overline{M^1}$ *qui prolonge la VAHB universelle* $f : \mathcal{A} \to M^1$. *Ce schéma en groupes est muni d'une action de* $\mathfrak{o}$ *et c'est un tore au-dessus de* $\overline{M^1} \setminus M^1$.

Démonstration. L'unicité est montrée dans un cadre beaucoup plus général dans le chapitre I du livre de Chai et Faltings [7]. Pour l'existence on considère le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \arrow[rr, dashed] \arrow[dd] & & \mathfrak{G} \arrow[dd, dashed] & & \\
G^0_\sigma[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}] \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & G_\sigma[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}] \arrow[ur, dashed] \arrow[dd] & & & \\
 & M^1 \arrow[rr] & & \overline{M^1} & & \overline{M^1}^\wedge \arrow[ll] \\
\overline{S}^0_\sigma[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \overline{S}_\sigma[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}] \arrow[ur] & & S^\wedge_\sigma[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}] . \arrow[ll] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

□

Théorème 7.7. *Le* $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}])$*-schéma* $\overline{M}$ *est propre.*

Démonstration. L'idée, comme dans [11], est d'appliquer le critère valuatif de propreté tel qu'il est énoncé dans [3] (voir Théorème 4.19 et le commentaire qui suit). Il suffit de vérifier la propreté de $\overline{M^1}$.

Soit V un anneau de valuation discrète de corps de fractions K. Comme M^1 est ouvert et dense dans $\overline{M^1}$, il suffit de vérifier que tout morphisme $g^0 : \mathrm{Spec}(K) \to M^1$, s'étend en un morphisme $g : \mathrm{Spec}(V) \to \overline{M^1}$. Supposons que g^0 ne s'étend pas déjà en un morphisme $g : \mathrm{Spec}(V) \to M^1$. La VAHB A/K donnée par f^0 est donc à mauvaise réduction (voir Deligne–Pappas [4]). Quitte à remplacer K par une extension finie et V par sa normalisation, on peut supposer que A/K est à mauvaise réduction semi-stable. Nous sommes alors en mesure d'appliquer à A/K la théorie de géométrie rigide de Raynaud, qui nous fournit (voir la partie 6) :

– deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, tels que $A_{\mathrm{rig}} = (\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \otimes \mathfrak{a}^*)_{\mathrm{rig}}/\mathfrak{b}_{\mathrm{rig}}$ et $\mathfrak{c} = \mathrm{Sym}_{\mathfrak{o}}(A, A^t) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{-1}$ (ceci définit une R-pointe).

– une suite exacte $0 \to (\mathfrak{a}/\mathfrak{n}\mathfrak{a})(1) \to A[\mathfrak{n}] \to \mathfrak{n}^{-1}\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \to 0$. La $\mu_{\mathfrak{n}}$-structure de niveau $(\mathfrak{o}/\mathfrak{n})(1) \hookrightarrow A[\mathfrak{n}]$ définit alors une $(R, \mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$ au-dessus de la R-pointe définie précédemment (à laquelle on peut associer un idéal $\mathfrak{b}' \supset \mathfrak{b}$) et une racine de l'unité $\zeta_{\mathcal{C}}$ d'ordre l'exposant du groupe $\mathfrak{b}'/\mathfrak{b}$.

– un élément $\xi^* \in (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^*_+$ (bien défini modulo l'action de $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}$), venant de la forme bilinéaire $\mathfrak{o}$-équivariante $\langle\, ,\, \rangle : \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \to \mathrm{Val(K)} \cong \mathbb{Z} \quad (\alpha, \beta) \mapsto \mathrm{val}(\mathfrak{X}^\alpha(\beta))$.

Un translaté de ξ^* par le groupe $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ appartient à un certain cône $\sigma_i^{\mathcal{C}} \in \Sigma^{\mathcal{C}}$, parmi les cônes choisis dans la démonstration du théorème. Le morphisme g^0 se factorise alors par la carte locale $\overline{S}^0_{\sigma_i^{\mathcal{C}}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}]) \to M^1$. Le morphisme composé $g : \mathrm{Spec}(V) \to \overline{S}_{\sigma_i^{\mathcal{C}}} \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}]) \to \overline{M^1}$ étend le morphisme g^0. □

8 Formes de Hilbert et compactification minimale arithmétiques

Nous savons qu'une forme modulaire de Hilbert classique (sur $\mathbb{C}$) est uniquement déterminée par son q-développement en une pointe $\mathcal{C}$, que la condition d'holomorphie à l'infinie est automatiquement satisfaite si $d_F > 1$ (Principe de Koecher) et qu'il n'y a pas de séries d'Eisenstein en poids non-parallèle.

Le but de cette partie est de décrire, en suivant [11], les propriétés du q-développement d'une forme de Hilbert arithmétique. C'est le point de départ de la construction de la compactification minimale arithmétique de M (voir [2]).

Formes modulaires de Hilbert arithmétiques. Pour la définition de l'espace des formes modulaires de Hilbert, nous suivons le paragraphe 6.8 de [11], rédigé par P. Deligne. Considérons le schéma en groupes $\mathcal{T}_1 = \mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ sur $\mathbb{Z}$, dont la fibré générique est le tore $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ de groupes de caractères $\mathbb{Z}[J_F]$, où J_F désigne l'ensemble des plongements de F dans $\mathbb{R}$. On suppose dans cette partie que $d_F > 1$.

Par définition de la VAHB universelle, le faisceau $\underline{\omega}_{\mathcal{A}/M^1} = f_*\Omega^1_{\mathcal{A}/M^1}$ est un $\mathfrak{o}$-fibré inversible sur $M^1 \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])$.

Soit $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F] = X(\mathcal{T}_1)$ un poids et soit F'' un corps de nombres, contenant les valeurs du caractère $\kappa : F^\times \to \mathbb{C}^\times$. On peut prendre, par exemple, $F'' = \mathbb{Q}$ et poids parallèle, ou bien $F'' = F^{\mathrm{gal}}$ et poids quelconque.

Soit $\mathfrak{o}''$ l'anneau des entiers de F''. Le morphisme de groupes algébriques $\kappa : \mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Res}^{F''}_{\mathbb{Q}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, se prolonge en un morphisme $\mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \to \mathrm{Res}^{\mathfrak{o}''}_{\mathbb{Z}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$, qui équivaut (par la formule d'adjonction) à un morphisme de groupes algébriques sur $\mathfrak{o}''$, $\mathrm{Res}^{\mathfrak{o}}_{\mathbb{Z}}\, \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}'') \to \mathbb{G}_{\mathrm{m}} \times \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}'')$, noté encore κ.

A l'aide de κ, on peut découper dans $\underline{\omega}$ un fibré inversible sur $M^1 \times \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}''[\frac{1}{\Delta}])$, noté $\underline{\omega}^\kappa$. Soit $\mathfrak{o}'$ l'anneau des entiers de $F' = F''(\epsilon^{1/2}, \epsilon \in \mathfrak{o}^\times_{D+})$. Alors $\underline{\omega}^\kappa$ descend en un fibré inversible sur $M \times \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}])$, noté encore $\underline{\omega}^{\kappa}$ (voir la partie 4 de [6] pour une présentation plus détaillée).

Pour tout $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$-schéma Y, on pose $Y' = Y \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}])$.

Définition 8.1. Soit R une $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre.

Une forme modulaire de Hilbert arithmétique de poids κ, de niveau Γ et à coefficients dans R, est une section globale de $\underline{\omega}^{\kappa}$ sur $M \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R)$. On note $G_{\kappa}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)^{\mathrm{geom}} := \mathrm{H}^0(M \times_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}])} \mathrm{Spec}(R), \underline{\omega}^{\kappa})$ l'espace de ces formes modulaire de Hilbert.

Remarque 8.2. 1) Le faisceau $\underline{\omega}^{t}$ ($t = \sum_{\tau \in J_F} \tau$) n'est autre que le faisceau $\wedge^{d_F} \underline{\omega} = \det(\underline{\omega})$ sur M, et $\underline{\omega}^{kt}$ - sa puissance k-ième. Les formes modulaires de Hilbert de poids parallèle $k \geq 1$, s'écrivent donc $G_{kt}(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})^{\mathrm{geom}} = \mathrm{H}^0(M, (\wedge^{d_F} \underline{\omega})^{\otimes k})$.

2) Si $F' \supset F^{\mathrm{gal}}$, l'action de $\mathfrak{o}$ permet de décomposer $\underline{\omega} \cong \mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{M'}$ en somme directe de fibrés inversibles $\underline{\omega}^{\tau}$ sur M', indexés par les différents plongements τ de F dans F^{gal}. Si $\kappa = \sum k_\tau \tau$, on a $\underline{\omega}^{\kappa} = \bigotimes_\tau (\underline{\omega}^{\tau})^{\otimes k_\tau}$.

Soit $\overline{f} : \mathfrak{G} \to \overline{M^1}$ le schéma semi-abélien au-dessus d'une compactification toroïdale $\overline{M^1}$ de M^1, comme dans la partie précédente. Le faisceau $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}} := \overline{e}^* \Omega^1_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$, où $\overline{e} : \overline{M^1} \to \mathfrak{G}$ désigne la section unité, prolonge le faisceau $\underline{\omega}_{\mathcal{A}/M^1}$. En outre $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ coïncide avec le faisceau $(\overline{f}_* \Omega^1_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}})^{\mathfrak{G}}$ des $\mathfrak{G}$-invariants de $\overline{f}_* \Omega^1_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$. En passant aux cartes formelles, on voit comme dans [11], qu'au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{\Delta}]$, le faisceau $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ est un $\mathfrak{o}$-fibré inversible. Le fibré $\underline{\omega}_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ descend en un $\mathfrak{o}$-fibré inversible sur $\overline{M}'$, noté $\underline{\omega}$ (voir la partie 7 de [6]). Pour tout $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]$, on peut ainsi prolonger le fibré inversible $\underline{\omega}^{\kappa}$ en un fibré inversible sur $\overline{M}'$, noté encore $\underline{\omega}^{\kappa}$.

D'après la partie 2 pour toute $(R, \mathfrak{n})$-composante uniformisée $\mathcal{C}$, tout cône $\sigma \in \Sigma^{\mathcal{C}}$ et pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}, \zeta_{\mathcal{C}}]$-algèbre R on a $\underline{\omega}|_{S_\sigma^\wedge \times \mathrm{Spec}(R)} \simeq (\mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}_{S_\sigma^\wedge \times \mathrm{Spec}(R)})$, d'où

$$\underline{\omega}^{\kappa}|_{S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \times \mathrm{Spec}(R)} \simeq (\mathfrak{a} \otimes \mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}} \otimes R)^{-\kappa} = (\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{o}'[\tfrac{1}{\Delta}])^{-\kappa} \underset{\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]}{\otimes} (\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}} \otimes R)^{-\kappa} \tag{5}$$

Par conséquent $\mathrm{H}^0((S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \times \mathrm{Spec}(R))/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}, \underline{\omega}^{\kappa}) = \mathfrak{a}^{(\kappa)} \otimes_{\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]} R^{(\kappa)}_{\mathcal{C}}(R)$, où $\mathfrak{a}^{(\kappa)} = (\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}])^{-\kappa}$ est un $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-module inversible et

$$R^{(\kappa)}_{\mathcal{C}}(R) := \Big\{ \sum_{\xi \in X_+ \cup \{0\}} a_\xi q^\xi \;\Big|\; a_\xi \in R,\ \ a_{u^2\epsilon\xi} = \epsilon^{\kappa/2} u^{\kappa} \zeta_{\mathcal{C}}^{n \operatorname{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u \xi^*_{u,\epsilon})} a_\xi,\ \ \forall (u, \epsilon) \in \mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}} \Big\}.$$

Notons que $\xi u \xi^*_{u,\epsilon}$ est un élément de $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{d}^{-1}$, bien défini modulo $\mathfrak{d}^{-1}$, et donc $n \operatorname{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u \xi^*_{u,\epsilon}) \in \mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$ (on rappelle que $n\,\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \cap \mathfrak{b}\mathfrak{b}'^{-1}$ et $n = \mathrm{ord}(\zeta_{\mathcal{C}})$).

On a $R^{(\kappa)}_{\mathcal{C}}(R) = \mathrm{H}^0\big(S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \times \mathrm{Spec}(R), (\mathfrak{o} \otimes \mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}} \otimes R)^{-\kappa}\big)^{\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}}$.

Le diagramme suivant montre comment l'anneau $R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)$ se situe par rapport aux différents anneaux déjà considérés dans la partie 2 :

$$\begin{array}{ccccc} & & R[q^{\xi}]_{\xi\in X_+\cup\{0\}} & \hookrightarrow & R_\sigma\otimes R = R[q^{\xi}]_{\xi\in X\cap\check{\sigma}} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R) & \hookrightarrow & R[[q^{\xi}]]_{\xi\in X_+\cup\{0\}} & \hookrightarrow & R_\sigma^\wedge\otimes R\,. \end{array}$$

Principe de Koecher.

Théorème 8.3 (Principe de Koecher [11] 4.9). *Soit $\overline{M}$ une compactification toroïdale de M. Alors*

$$\mathrm{H}^0\big(M\times\mathrm{Spec}(R),\underline{\omega}^\kappa\big)=\mathrm{H}^0\big(\overline{M}\times\mathrm{Spec}(R),\underline{\omega}^\kappa\big)$$

Démonstration. Le problème est local et il suffit de le vérifier après complétion, le long d'une $(R,\mathfrak{n})$-composante $\mathcal{C}$.

D'après la trivialisation (5) du fibré inversible $\underline{\omega}^\kappa$, il s'agit de voir que les sections globales méromorphes du faisceau $(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}}\otimes R)^{-\kappa}$ sur $S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}\times\mathrm{Spec}(R)$, qui sont $\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$-invariantes, appartiennent à $R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)$.

Soit $f=\sum_{\xi\in X}a_\xi q^\xi\in\mathrm{H}^0_{\mathrm{mer}}((S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}\times\mathrm{Spec}(R))/\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times,(\mathfrak{o}\otimes\mathcal{O}_{S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}}\otimes R)^{-\kappa})$ une telle section. Supposons que $a_{\xi_0}\neq 0$ avec ξ_0 non-totalement positif. Il existe donc $\xi_0^*\in X^*_{\mathbb{R}+}$ avec $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi_0\xi_0^*)$ strictement négatif. Comme $d_F>1$, on peut choisir des unités $u\in\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ de manière à rendre la quantité $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(u^2\xi_0\xi_0^*)$ arbitrairement proche de $-\infty$. Soit σ un cône polyédral de $\Sigma^{\mathcal{C}}$ contenant ξ_0^*. Par définition de $S^\wedge_\sigma$, on voit que f n'est pas méromorphe sur $S^\wedge_\sigma$. Contradiction. Donc $f\in R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)$. $\square$

***q*-développement.** Le paragraphe précédent montre que l'on peut associer à une $(R,\mathfrak{n})$-composante uniformisée $\mathcal{C}$ et à une forme modulaire de Hilbert f de poids κ, niveau Γ, et à coefficients dans une $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta},\zeta_{\mathcal{C}}]$-algèbre R, un élément :

$$f_{\mathcal{C}}\in\mathfrak{a}^{(\kappa)}\otimes_{\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]}R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R).$$

Définition 8.4. L'élément $f_{\mathcal{C}}$ est appelé le q-développement de la forme f en la $(R,\mathfrak{n})$-composante uniformisée $\mathcal{C}$. On note $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},\kappa}$ l'application $f\mapsto f_{\mathcal{C}}$.

Le principe du q-développement s'énonce alors :

Proposition 8.5. *Soient κ un poids, $\mathcal{C}$ une $(R,\mathfrak{n})$-composante uniformisée et R une $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta},\zeta_{\mathcal{C}}]$-algèbre (contenant les valeurs de κ). Alors*

(i) *l'application* $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},\kappa}$ *est injective,*

(ii) *pour toute R-algèbre R' et $f\in G_\kappa(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R')$, si* $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},\kappa}(f)\in\mathfrak{a}^{(\kappa)}\otimes_{\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]}R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R)$, *alors $f\in G_\kappa(\mathfrak{c},\mathfrak{n};R)$,*

(iii) *s'il existe* $f \in G_\kappa(\mathfrak{c}, \mathfrak{n}; R)$ *tel que le terme constant de* $\mathrm{ev}_{\mathcal{C},\kappa}(f)$ *ne soit pas nul, alors* $\epsilon^{\kappa/2}u^\kappa - 1$ *est un diviseur de zéro dans* R*, pour tout* $(u, \epsilon) \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times$.

Le cas de l'anneau nul $R = 0$ redonne une formulation classique du principe. Pour démonstration du (i) et du (ii) voir la partie 7 de [6]. Le (iii) est clair. □

Compactification minimale. La compactification minimale est la contrepartie arithmétique de la compactification de Satake sur $\mathbb{C}$. Contrairement au cas complexe, dans le cas arithmétique, la construction de la compactification minimale utilise les compactifications toroïdales. Voici l'analogue en niveau Γ de l'énoncé donné par C.-L. Chai dans [2].

Théorème 8.6.

(i) *Il existe* $k_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que le faisceau* $\underline{\omega}^{k_0 t}_{\mathcal{A}/M^1}$*, soit engendré par ses sections globales sur* $\overline{M^1}$.

(ii) *Le morphisme canonique* $\pi : \overline{M^1} \to M^{1*} := \mathrm{Proj}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]}\big(\bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kt}_{\mathcal{A}/M^1})\big)$, *est surjectif. Le* $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$*-schéma* M^{1*} *est indépendant du choix de* Σ *(on rappelle que* $\overline{M^1} = M^1_\Sigma$*).*

(iii) *L'anneau gradué* $\bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kt}_{\mathcal{A}/M^1})$ *est de type fini sur* $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$ *et* M^{1*} *est un* $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$*-schéma projectif, normal, de type fini. Le groupe* $\mathfrak{o}^\times_{D+}/(\mathfrak{o}^\times_{D+} \cap \mathfrak{o}^{\times 2}_{\mathfrak{n}})$ *du revêtement fini étale* $\overline{M^1} \to \overline{M}$ *agit sur* M^{1*} *et le quotient est un* $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$*-schéma projectif, normal, de type fini* M^**, muni d'un morphisme surjectif* $\pi : \overline{M} \to M^*$.

(iv) $\pi|_M$ *induit un isomorphisme sur un ouvert dense de* M^**, noté encore* M*.* $M^* \backslash M$ *est fini et étale sur* $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$ *et en fait isomorphe à :*

$$\coprod_{(R,\mathfrak{n})-\text{composantes}/\sim} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C}}}).$$

Les composantes connexes de $M^* \backslash M$ *sont appelées les pointes de* M*. Cependant celles-ci ne sont des points fermés que pour les* $(R, \mathfrak{n})$*-composantes non-ramifiées.*

(v) *L'image réciproque* $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ *de chaque pointe* $\mathcal{C}$ *de* M*, est une composante connexe de* $\overline{M} \backslash M$*. La complétion formelle de* $\overline{M}$ *le long de l'image réciproque d'une composante* $\pi^{-1}(\mathcal{C})$*, est canoniquement isomorphe à* $(S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C}}) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{\mathcal{C}}]^{H_{\mathcal{C}}})$*. En particulier, la complétion formelle de* $\overline{M}$ *le long de l'image réciproque* $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ *d'une* $(R, \mathfrak{n})$*-composante non-ramifiée* $\mathcal{C}$*, est canoniquement isomorphe à*

$$(S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/(\mathfrak{o}^\times_{\mathfrak{n}} \times \mathfrak{o}^\times_{D+})) \times \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]).$$

(vi) *Pour tout* $\kappa \in \mathbb{Z}[J_F]$ *le faisceau* $\underline{\omega}^\kappa$ *s'étend en un faisceau inversible sur* M^* *si et seulement si* κ *est parallèle.*

Démonstration. Nous suivons la méthode de C.-L. Chai [2]. D'après [9] Chap.IX Thm.2.1 (voir aussi [7] Chap.V Prop.2.1), il existe $k_0 \geq 1$ tel que le faisceau inversible $\underline{\omega}^{k_0 t}_{\mathcal{A}/M^1}$ soit engendré par ses sections globales sur $\overline{M^1}$. Ceci nous fournit un morphisme

$$\overline{M^1} \to \mathrm{Proj}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]}\big(\mathrm{Sym}^\bullet \mathrm{H}^0\big(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{k_0 t}_{\mathcal{A}/M^1}\big)\big).$$

Soit $B^\bullet$ la normalisation de $\mathrm{Sym}^\bullet \mathrm{H}^0\big(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kk_0t}_{\mathcal{A}/M^1}\big)$ dans $\bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{H}^0\big(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kk_0t}_{\mathcal{A}/M^1}\big)$. Le morphisme associé $\pi : \overline{M^1} \to \mathrm{Proj}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]}(B^\bullet)$ est birationnel, surjectif et satisfait $\pi^*\mathcal{O}(1) = \underline{\omega}^{k_0t}_{\mathcal{A}/M^1}$. Le Théorème de Connexité de Zariski implique alors que les fibres de π sont connexes. D'après [7] Chap.V Prop.2.2, la partie abélienne est constante dans chaque fibre géométrique de π, et par conséquent les fibres géométriques de π sont

– soit des points géométriques de M^1,

– soit des composantes géométriques connexes de $\overline{M^1} \setminus M^1$.

Comme pour tout $k \geq 1$, $\pi^*\mathcal{O}(k) = \underline{\omega}^{k_0kt}_{\mathcal{A}/M^1}$ et $\underline{\omega}^{k_0t}_{\mathcal{A}/M^1}$ est engendré par ses sections globales sur $\overline{M^1}$, on obtient $\mathrm{H}^0\big(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kk_0t}_{\mathcal{A}/M^1}\big) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Proj}(B^\bullet), \mathcal{O}(k))$. Par conséquent $B^\bullet = \bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{H}^0\big(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kk_0t}_{\mathcal{A}/M^1}\big)$ et c'est une $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$-algèbre de type fini. Or, l'algèbre $\bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{H}^0\big(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kt}_{\mathcal{A}/M^1}\big)$ est entière sur $\bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{H}^0\big(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kk_0t}_{\mathcal{A}/M^1}\big)$, engendrée par les éléments de degré plus petit que k_0. Il en résulte que $\bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{H}^0(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kt}_{\mathcal{A}/M^1})$ est de type fini sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}]$, et que $M^{1*} := \mathrm{Proj}\big(\bigoplus_{k\geq 0} \mathrm{H}^0\big(\overline{M^1}, \underline{\omega}^{kt}_{\mathcal{A}/M^1}\big)\big) = \mathrm{Proj}(B^\bullet)$. Par le principe de Koecher, le schéma M^{1*} est indépendant du choix particulier de la compactification toroïdale $\overline{M^1}$ de M^1. Le groupe $\mathfrak{o}^\times_{D+}/(\mathfrak{o}^\times_{D+} \cap \mathfrak{o}^{\times 2}_{\mathfrak{n}})$ agit sur M^{1*} et on définit M^* comme le quotient. Notons qu'en général $M^{1*} \to M^*$ n'est pas étale, car les pointes peuvent avoir des stabilisateurs non-triviaux.

On a donc (i),(ii),(iii) et la première partie de (iv). Le calcul de la complétion formelle de $\overline{M}$, le long de l'image réciproque d'une composante connexe de $M^* \setminus M$ découle du Théorème des Fonctions Formelles de Grothendieck.

Enfin, examinons à quelle condition $\underline{\omega}^\kappa_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ descend en un fibré inversible sur M^{1*}. Comme $(\pi_*\underline{\omega}^\kappa_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}})|_{M^1} = \underline{\omega}^\kappa_{\mathcal{A}/M^1}$ et $\mathrm{codim}(M^{1*} \setminus M^1) \geq 2$, le faisceau $\pi_*\underline{\omega}^\kappa_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ est cohérent. Il est inversible si et seulement si $\underline{\omega}^\kappa_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ peut être trivialisé sur $S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}}/\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1} \times \mathrm{Spec}(R)$. D'après (5) le pull-back de $\underline{\omega}^\kappa_{\mathfrak{G}/\overline{M^1}}$ à $S^\wedge_{\Sigma^{\mathcal{C}}} \times \mathrm{Spec}(R)$ est canoniquement trivial et $\mathfrak{o}^\times_{\mathcal{C},1}$ agit sur ce pull-back à travers κ, d'où (vi). □

Exemples de q-développement en une pointe ramifiée. Nous nous proposons de décrire explicitement dans le cas particulier de l'exemple 3.4(ii)(iii) les anneaux $R^{(\kappa)}_{\mathcal{C}}(R)$ contenant les q-développements des formes modulaires de Hilbert de poids κ et niveau Γ. Rappelons que $\mathfrak{o}'$ désigne les entiers d'un corps de nombres contenant les valeurs du caractère κ. On suppose que $\mathrm{Cl}_F = \{1\}$.

Plaçons nous dans le cas (ii). Le bord $M^{1*} \setminus M^1$ s'écrit alors

$$\coprod_{\substack{(R,\mathfrak{n})-\text{comp.}\\ \text{non-ramifiés}/\sim}} \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}\right]\right) \coprod_{\substack{(R,\mathfrak{n})-\text{comp.}\\ \text{peu ramifiés}/\sim}} \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_p\right]\right) \coprod_{\substack{(R,\mathfrak{n})-\text{comp.}\\ \text{très ramifiés}/\sim}} \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_{p^2}\right]^{\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}^\times_{\mathfrak{p}^2}}\right)$$

– Si la pointe $\mathcal{C}$ est non-ramifiée, pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre R, on a

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R) = \Big\{ \sum_{\xi\in\mathfrak{o}_+} a_\xi q^\xi \mid a_\xi \in R,\ \ a_{u^2\xi} = u^\kappa a_\xi,\ \ \forall u \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times \Big\}.$$

– Si la pointe $\mathcal{C}$ est peu ramifiée, pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}, \zeta_p]$-algèbre R, on a

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R) = \Big\{ \sum_{\xi\in\mathfrak{p}_+^{-1}} a_\xi q^\xi \mid a_\xi \in R,\ \ a_{u^2\xi} = u^\kappa \zeta_p^{p\,\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u\xi_u^*)} a_\xi,\ \ \forall u \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times \Big\}.$$

– Si la pointe $\mathcal{C}$ est très ramifiée, pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}, \zeta_{p^2}]$-algèbre R, on a

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R) = \Big\{ \sum_{\xi\in\mathfrak{p}_+^{-2}} a_\xi q^\xi \mid a_\xi \in R,\ \ a_{u^2\xi} = u^\kappa \zeta_{p^2}^{p^2\,\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u\xi_u^*)} a_\xi,\ \ \forall u \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times \Big\}.$$

En fait, d'après la démonstration de la Prop.3.3(iv), on a $\xi_u^* \in \mathfrak{p}^2\mathfrak{d}^{-1}$ et donc $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u\xi_u^*) \in \mathbb{Z}$ (alors qu'à priori il appartient juste à $p^{-2}\,\mathbb{Z}$!). On en déduit que

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R) = \Big\{ \sum_{\xi\in\mathfrak{p}_+^{-2}} a_\xi q^\xi \mid a_\xi \in R,\ \ a_{u^2\xi} = u^\kappa a_\xi,\ \ \forall u \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times \Big\},$$

ce qui est compatible avec le fait que ζ_{p^2} n'appartient pas au corps de définition de la pointe $\mathcal{C}$, qui est $\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})^{\mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times}$ (notons que $-1 \in \mathfrak{o}^\times/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}^2}^\times$).

Plaçons nous dans le cas (iii). Le bord $M^{1*} \setminus M^1$ s'écrit alors

$$\coprod_{\substack{(R,\mathfrak{n})-\text{comp.}\\ \text{non-ramifiés}/\sim}} \mathrm{Spec}\Big(\mathbb{Z}\Big[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}\Big]\Big) \coprod_{\substack{(R,\mathfrak{n})-\text{comp.}\\ \text{ramifiés}/\sim}} \mathrm{Spec}\Big(\mathbb{Z}\Big[\tfrac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}, \zeta_p\Big]^{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times}\Big).$$

– Si la pointe $\mathcal{C}$ est non-ramifiée, pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}]$-algèbre R, on a

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R) = \Big\{ \sum_{\xi\in\mathfrak{o}_+} a_\xi q^\xi \mid a_\xi \in R,\ \ a_{u^2\xi} = u^\kappa a_\xi,\ \ \forall u \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times \Big\}.$$

– Si la pointe $\mathcal{C}$ est ramifiée, pour toute $\mathfrak{o}'[\frac{1}{\Delta}, \zeta_p]$-algèbre R, on a

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R) = \Big\{ \sum_{\xi\in\mathfrak{p}_+^{-1}} a_\xi q^\xi \mid a_\xi \in R,\ \ a_{u^2\xi} = u^\kappa \zeta_p^{p\,\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u\xi_u^*)} a_\xi,\ \ \forall u \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times \Big\}.$$

En fait, d'après la démonstration de la Prop.3.3(iv), on a $\xi_u^* \in \mathfrak{p}\mathfrak{d}^{-1}$ et donc $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi u\xi_u^*) \in \mathbb{Z}$ (alors qu'à priori il appartient juste à $p^{-1}\,\mathbb{Z}$!). On en déduit que

$$R_{\mathcal{C}}^{(\kappa)}(R) = \Big\{ \sum_{\xi\in\mathfrak{p}_+^{-1}} a_\xi q^\xi \mid a_\xi \in R,\ \ a_{u^2\xi} = u^\kappa a_\xi,\ \ \forall u \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times \Big\},$$

ce qui est compatible avec le fait que ζ_p n'appartient pas au corps de définition de la pointe $\mathcal{C}$, qui est $\mathbb{Q}(\zeta_p)^{\mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times}$ (notons que $-1 \in \mathfrak{o}_{\mathcal{C}}^\times/\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^\times$).

Références

[1] J.-L. Brylinski and J.-P. Labesse, Cohomologie d'intersection et fonctions L de certaines variétés de Shimura. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **17** (1984), 361–412.

[2] C.-L. Chai, Arithmetic minimal compactification of the Hilbert-Blumenthal moduli space. *Ann. of Math.* **131** (1990), 541–554.

[3] P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **36** (1969), 75–109.

[4] P. Deligne and G. Pappas, Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant. *Compositio Math.* **90** (1994), 59–79.

[5] P. Deligne and M. Rapoport, Les schémas de modules de courbes elliptiques. In *Modular functions of one variable II*, Lecture Notes in Math. 349, Springer-Verlag, Berlin 1972, 143–316.

[6] M. Dimitrov and J. Tilouine, Variétés et formes modulaires de Hilbert arithmétiques pour $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$. In *Geometric Aspects of Dwork Theory* (A. Adolphson, F. Baldassarri, P. Berthelot, N. Katz and F. Loeser, eds.), Walter de Gruyter, Berlin 2004, 553–609.

[7] G. Faltings and C.-L. Chai, *Degeneration of Abelian Varieties*. Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) 22, Springer-Verlag, Berlin 1990.

[8] N. Katz and B. Mazur, *Arithmetic moduli of elliptic curves*. Ann. of Math. Stud. 108, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[9] L. Moret-Bailly, Pinceaux de variétés abéliennes. *Astérisque* **129** (1985).

[10] D. Mumford, An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings. *Compositio Math.* **24** (1972), 239–272.

[11] M. Rapoport, Compactification de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal. *Compositio Math.* **36** (1978), 255–335.

[12] M. Raynaud, Variétés abéliennes et géométrie rigide. In *Actes du Congrès Internat. Math* (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris 1971, 473–477.

Mladen Dimitrov, LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13, 99, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

E-mail: dimitrov@math.univ-paris13.fr